

Une généralisation du *bien-composé* à la dimension n

Nicolas Boutry^{1,2}, Thierry Géraud¹ et Laurent Najman²

¹EPITA Research and Development Laboratory (LRDE)

²Université Paris-Est, LIGM, Équipe A3SI, ESIEE

Résumé

The notion of well-composedness has been introduced by Latecki in 1995 for 2D sets and images and for 3D sets in 1997. Well-composed binary digital images enjoy important topological properties; in addition, many algorithms can take advantage from these topological properties. Up to now, well-composedness has not been studied in dimension n , with $n > 3$. In the presented work, we extend the characterizations of well-composed sets and images to any dimension. We also prove the fundamental theorem of equivalence of the connectivities for a well-composed set.

La notion de bien-composé a été introduite par Latecki en 1995 pour les ensembles et les images 2D et pour les ensembles 3D en 1997. Les images binaires bien-composées disposent d'importantes propriétés topologiques. De plus, de nombreux algorithmes peuvent tirer avantage de ces propriétés topologiques. Jusqu'à maintenant, la notion de bien-composé n'a pas été étudiée en dimension n , avec $n > 3$. Dans le travail présenté ici, nous démontrons le théorème fondamental de l'équivalence des connexités pour un ensemble bien-composé, puis nous généralisons la caractérisation des ensembles et des images bien-composés à la dimension n .

Mots clé : bien-composé, images nD, topologie digitale

1. Introduction

Une image qui n'est pas bien-composée peut impliquer des paradoxes de connexité [KR89], [RL66], [LER95]. De plus, le théorème de séparation de Jordan, expliquant qu'une courbe simple fermée (respectivement une surface simple fermée) sépare un plan (respectivement un espace) en deux composantes connexes disjointes, n'est plus exact dans les espaces discrets usuels. À l'inverse, une image qui est bien-composée ne présente plus ce paradoxe, car ses connexités sont alors toutes équivalentes [Ros70], [TASG11]. Alors le théorème de Jordan est à nouveau satisfait [LER95]. De plus, les images bien-composées permettent des algorithmes d'amincissement simplifiés [MAM04], rendent la caractéristique d'Euler localement calculable [Lat97], simplifient les structures de graphes résultant des algorithmes de squelettisation [LER95], et simplifient certains algorithmes de marching cubes [TASG11]. Sous certaines contraintes de régularité, la notion de bien-composé est préservée par transformation rigide [NPKT14].

Un dernier point, celui-ci représentant notre principal objectif, est le suivant : les images bien-composées assurent que l'arbre des formes [Gér13] est bien défini [NG13]. L'algorithme permettant de calculer l'arbre des formes se

trouve dans [GCCN13] et est en temps quasi-linéaire. Une introduction à l'arbre des formes en milieu continu peut être trouvée dans [CM09].

Après un court état de l'art sur la notion de bien-composé, nous proposerons une généralisation à la dimension n des caractérisations du bien-composé. Aussi, nous détaillerons une propriété très forte des ensembles bien-composés : leurs connexités sont équivalentes.

2. Etat de l'art

Commençons par un rappel de la définition du bien-composé en dimension 2 [LER95].

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ un ensemble. X est dit *bien-composé* ssi X est localement 4-connexe[†].

On rappelle que la *fonction caractéristique* d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est la fonction binaire $\xi_X : \mathbb{Z}^n \mapsto \{0, 1\}$ définie telle

[†]. Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est *localement 4-connexe* ssi $\forall z \in X, \mathcal{N}_8(z) \cap X$ est une 4-composante

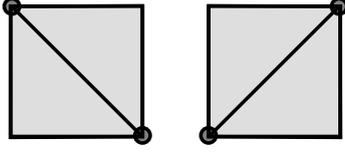


Figure 1: Configurations critiques possibles en dimension 2.

$$\text{que } \xi_X(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in X, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi nous pouvons introduire le bien-composé pour les images binaires [LER95].

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ un ensemble. X est dit *bien-composé* ssi l'image de sa fonction caractéristique ξ_X ne contient pas les configurations critiques $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Des exemples de configurations critiques sont représentés sur la figure 1.

Latecki a alors introduit les notions d'analogie continu et de contour de l'analogie continu [Lat97] de façon à pouvoir étendre ses définitions du bien-composé à la 3D.

L'analogie continu $CA(z)$ d'un point $z \in \mathbb{Z}^3$ est le cube unitaire fermé centré en ce point z et dont les faces sont parallèles aux plans des coordonnées. L'analogie continu d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est défini comme étant $CA(X) = \bigcup \{CA(x) \mid x \in X\}$. Aussi, le contour de l'analogie continu d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est noté $bdCA(X)$ et est défini comme étant l'union de l'ensemble des faces fermées qui sont à la fois face d'un cube étant dans $CA(X)$ et face d'un cube n'étant pas dans $CA(X)$.

Alors, soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^3 . X est dit *bien-composé* [Lat97] si chacune des composantes connexes du contour de son analogie continu $bdCA(X)$ est localement homéomorphe à la sphère S^2 .

Ceci amena à la définition équivalente suivante, basée à nouveau sur les configurations critiques [Lat97].

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^3 . X est dit *bien-composé* ssi l'image de sa fonction caractéristique ξ_X ne contient pas de configurations critiques (modulo les symétries axiales et les rotations) suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, le fait qu'un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ soit bien-composé implique qu'il soit localement $2n$ -connexe mais l'inverse n'est pas vrai [BGN14], comme le montre l'ensemble dont l'image de la fonction caractéristique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Généralisation du bien-composé à la dimension n

3.1. Rappels de quelques notions

Dans la suite, nous supposons que $\mathbb{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ est une base orthonormée de \mathbb{Z}^n .

Rappelons les notions de [BGN14] qui vont nous être utiles.

Soit z un point dans \mathbb{Z}^n et $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une sous-famille de \mathbb{B} . Nous définissons le *bloc associé au couple* (z, \mathcal{F}) dans \mathbb{Z}^n de la façon suivante :

$$S(z, \mathcal{F}) = \{z + \sum_{j=1}^{\text{Card}(\mathcal{F})} \lambda_j \cdot f_j \mid \lambda_j \in \{0, 1\}, \forall j \in [1, \text{Card}(\mathcal{F})]\}.$$

Nous dirons qu'un bloc est de dimension k dans \mathbb{Z}^n ssi ce dernier est associé à une famille de vecteurs $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}$ de dimension k , et nous le noterons S_k .

L'ensemble des blocs inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^n$ est noté :

$$\mathcal{B}(\mathcal{E}) = \{S(z, \mathcal{F}) \mid z \in \mathbb{Z}^n, \mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}, S(z, \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{E}\}.$$

Soit S_k un bloc de dimension $k \in [1, n]$ dans \mathbb{Z}^n . L'antagoniste d'un point $z \in S_k$ dans S_k est le point $\text{antag}_{S_k}(z) \in \mathbb{Z}^n$ tel que :

$$\text{antag}_{S_k}(z) = \{z' \in S_k \mid \|z' - z\|_2 = \max_{z'' \in S_k} \|z'' - z\|_2\}.$$

De plus, soient z, z' deux points $(3^n - 1)$ -adjacents dans \mathbb{Z}^n , alors on dénotera par $\mathcal{B}(z, z')$ le plus petit bloc (au sens de l'inclusion) dans \mathbb{Z}^n contenant le couple $\{z, z'\}$.

Notez que l'antagoniste du point p dans un bloc S_k de dimension $k \in [1, n]$ existe et est unique.

3.2. Configurations critiques et bien-composé

Nous pouvons désormais introduire la notion de configuration critique en dimension n .

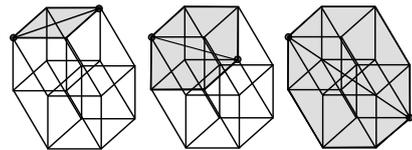


Figure 2: Exemples de configurations critiques 2D, 3D, et 4D dans un espace de dimension 4.

Définition 1 (Configurations critiques dans \mathbb{Z}^n) Soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n . Nous dirons que X contient une *configuration critique* ssi il existe un bloc $S_k \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}^n)$, $k \in [2, n]$, et un point $p \in S_k$ tel que $X \cap S_k = \{p, \text{antag}_{S_k}(p)\}$, ou tel que $X^c \cap S_k = \{p, \text{antag}_{S_k}(p)\}$. Dans le premier cas, nous dirons que $X \cap S_k$ est une *configuration critique primaire*, et dans le deuxième cas que $X \cap S_k$ est une *configuration critique secondaire*.

Des exemples de configurations critiques dans un espace de dimension 4 sont représentés dans la figure 2.

Définition 2 (Bien-composé dans \mathbb{Z}^n) Soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n . Nous dirons que X est *bien-composé* ssi il ne contient pas de configurations critiques.

Nous noterons que $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est bien-composé ssi X^c est bien-composé.

3.3. Caractérisation du bien-composé pour les ensembles en dimension n

Introduisons maintenant notre caractérisation du bien-composé à base de $2n$ -chemins.

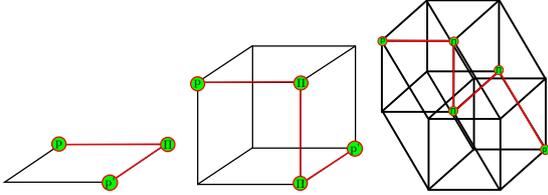


Figure 3: Pour tout ensemble bien-composé $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, lorsqu'un point p et son antagoniste p' sont tous deux dans X , alors ils sont tous deux connectés par un $2n$ -chemin π inclus dans $X \cap \mathcal{B}(p, p')$.

Théorème 1 (Caractérisation des ensembles bien-composés en dimension n) Soit X un ensemble dans \mathbb{Z}^n . Alors X est bien-composé ssi pour tout couple d'antagonistes (p, p') qui est dans X (respectivement dans X^c), il existe un $2n$ -chemin dans $X \cap \mathcal{B}(p, p')$ (respectivement dans $X^c \cap \mathcal{B}(p, p')$) les connectant.

Ce théorème est détaillé dans la figure 3.

Corollaire 1 (Equivalence des connexités dans les ensembles bien-composés) Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ un ensemble bien-composé. Soient p et p' deux points de X tels qu'ils sont connectés par un $(3^n - 1)$ -chemin dans X , alors il existe aussi un $2n$ -chemin dans X joignant p et p' . Autrement dit, les connexités d'un ensemble bien-composé sont équivalentes, i.e., l'ensemble de ses composantes connexes est le même quel que soit la connexité choisie.

4. Caractérisation des images bien-composées

Nous rappellerons la notion de coupes inférieures et supérieures présentées dans [GCCN13], cela afin de pouvoir définir ce que la notion de bien-composé représente pour une image.

4.1. Définition des coupes d'une image

Définition 3 (Coupes d'une image en dimension n) Soient $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} [u > \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) > \lambda\}, \\ [u < \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) < \lambda\}, \\ [u \geq \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \geq \lambda\}, \\ [u \leq \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \leq \lambda\}, \\ [u = \lambda] &= [u \leq \lambda] \cap [u \geq \lambda]. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont respectivement dénommés *coupe supérieure stricte*, *coupe inférieure stricte*, *coupe supérieure large*, *coupe inférieure large*, et *coupes d'isoniveau*.

Définition 4 (Images binaires n D bien-composées [Gér13])

Soit $u_{bin} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \{0, 1\}$ une image binaire. u_{bin} est dite bien-composée ssi les ensembles $[u_{bin} = 1]$ et $[u_{bin} = 0]$ sont bien-composés.

Définition 5 (Images réelles n D bien-composées [Gér13])

Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. Nous dirons que u est *bien-composée* ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les ensembles $[u \leq \lambda]$, $[u \geq \lambda]$, $[u < \lambda]$ et $[u > \lambda]$ sont bien-composés.

4.2. Quelques lemmes utiles

Nous présentons ici quelques lemmes qui nous seront très utiles par la suite, en particulier pour montrer à quel point il peut être important que le domaine sur lequel nos images sont définies soient des hyperrectangles, et en quoi cela intervient dans la notion de bien-composé.

Lemme 1 (Images bien-composées et finitude de leur domaine de définition)

Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle définie sur un domaine \mathcal{D} fini. Alors u est bien-composé sur \mathcal{D} ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $[u \leq \lambda]$ et $[u > \lambda]$ sont tous deux bien-composés (ou de manière équivalente ssi $[u \geq \lambda]$ et $[u < \lambda]$ sont tous deux bien-composés).

Soit une suite de n intervalles $\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_n)$ dans \mathbb{Z} . Alors l'*hyperrectangle* H associé à \mathcal{I} est le produit cartésien $\otimes_{i=1}^n I_i$. H est dit *borné* ssi tous ses intervalles associés sont bornés dans \mathbb{Z} .

Lemme 2 (Une particularité des hyperrectangles bornés)

Soit H un hyperrectangle borné dans \mathbb{Z}^n avec $n \geq 2$ fini. Soit alors deux ensembles X et Y formant une partition de H . Alors X est bien-composé ssi Y est bien-composé.

Désormais, nous supposons que \mathcal{D} est un hyperrectangle borné dans \mathbb{Z}^n , avec $n \geq 1$ fini.

Lemme 3 (Image réelle définie sur un hyperrectangle borné en dimension finie) Soit $u : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. Alors u est bien-composée ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la coupe $[u \leq \lambda]$ est bien-composée (ou de façon équivalente ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la coupe $[u \geq \lambda]$ est bien-composée).

Passons maintenant à la caractérisation du bien-composé, la définition étant posée.

4.3. Caractérisation du bien-composé pour les images réelles n D

Rappelons la caractérisation des images bien-composées 2D de Latecki de 1995 [LER95] : une image réelle $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est bien-composée ssi pour tout bloc S_2 tel que $u|_{S_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les intervalles associés \ddagger $\text{intvl}(a, d)$ et $\text{intvl}(b, c)$ vérifient la relation $\text{intvl}(a, d) \cap \text{intvl}(b, c) \neq \emptyset$.

Rappelons aussi que l'opérateur $\text{span} : E \subseteq \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ est défini de la façon suivante : $\text{span}\{E\} = [\min(E), \max(E)]$.

En 2014, dans [BGN14], nous avons alors proposé une extension de cette caractérisation des images réelles à la 3D de la façon suivante : soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^3 \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. Alors u est bien-composée sur \mathcal{D} ssi pour tout bloc $S_3 \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, avec $u|_{S_3} = \begin{pmatrix} c & d & a & b \\ g & h & e & f \end{pmatrix}$, les relations suivantes (voir la figure 4) sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \text{intvl}(a, d) \cap \text{intvl}(b, c) &\neq \emptyset & (P1) \\ \text{intvl}(e, h) \cap \text{intvl}(g, f) &\neq \emptyset & (P2) \\ \text{intvl}(a, f) \cap \text{intvl}(b, e) &\neq \emptyset & (P3) \\ \text{intvl}(c, h) \cap \text{intvl}(g, d) &\neq \emptyset & (P4) \\ \text{intvl}(a, g) \cap \text{intvl}(e, c) &\neq \emptyset & (P5) \\ \text{intvl}(b, h) \cap \text{intvl}(f, d) &\neq \emptyset & (P6) \\ \text{intvl}(a, h) \cap \text{span}\{b, c, d, e, f, g\} &\neq \emptyset & (P7) \\ \text{intvl}(b, g) \cap \text{span}\{a, c, d, e, f, h\} &\neq \emptyset & (P8) \\ \text{intvl}(c, f) \cap \text{span}\{a, b, d, e, g, h\} &\neq \emptyset & (P9) \\ \text{intvl}(d, e) \cap \text{span}\{a, b, c, f, g, h\} &\neq \emptyset & (P10) \end{aligned}$$

La figure 5 expose les ensembles de points mis en jeu dans les relations ci-dessus.

Ainsi, nous proposons ici la caractérisation générale suivante pour des images de dimension n , $n \geq 2$ fini :

Théorème 2 (Caractérisation d'une image n D bien-composée) Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle où \mathcal{D} est un hyperrectangle borné dans un espace de dimension finie

\ddagger . L'intervalle associé au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est défini par $\text{intvl}(x, y) = [\min(x, y), \max(x, y)]$.

$n \geq 2$. u est bien-composée ssi $\forall k \in [2, n], \forall S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{D}), \forall p \in S_k, \forall p' \in S_k$ tel que $p' = \text{antag}_{S_k}(p)$, la relation suivante est vérifiée :

$$\text{intvl}(u(p), u(p')) \cap \text{span}\{u(p'') \mid p'' \in S_k \setminus \{p, p'\}\} \neq \emptyset.$$

Notons par ailleurs que ce théorème établit le lien entre les images binaires bien-composées et les ensembles bien-composés.

5. Conclusion

Notre principale contribution consiste donc en une caractérisation du bien-composé pour les ensembles et pour les images réelles en dimension $n \geq 2$ finie, ainsi qu'en une propriété topologique essentielle des ensembles bien-composés : l'équivalence des connexités.

Références

- [BGN14] BOUTRY N., GÉRAUD T., NAJMAN L. : On making n -D images well-composed by a self-dual local interpolation. In *Discrete Geometry for Computer Imagery* (2014), vol. 8668 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 320–331.
- [CM09] CASELLES V., MONASSE P. : *Geometric Description of Images as Topographic Maps*, vol. 1984 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2009.
- [GCCN13] GÉRAUD T., CARLINET E., CROZET S., NAJMAN L. : A quasi-linear algorithm to compute the tree of shapes of n -D images. In *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing – Proceedings of the 11th International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 98–110.
- [Gér13] GÉRAUD T. : Self-duality and discrete topology : Links between the morphological tree of shapes and well-composed gray-level images. Journée du Groupe de Travail de Géométrie Discrète, June 2013.
- [KR89] KONG T. Y., ROSENFELD A. : Digital topology : Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. Vol. 48, Num. 3 (décembre 1989), 357–393.
- [Lat97] LATECKI L. : 3D well-composed pictures. *Graphical Models and Image Processing*. Vol. 59, Num. 3 (May 1997), 164–172.
- [LER95] LATECKI L., ECKHARDT U., ROSENFELD A. : Well-composed sets. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 61, Num. 1 (January 1995), 70–83.
- [MAM04] MARCHADIER J., ARQUÈS D., MICHELIN S. : Thinning grayscale well-composed images. *Pattern Recognition Letters*. Vol. 25 (April 2004), 581–590.
- [NG13] NAJMAN L., GÉRAUD T. : Discrete set-valued

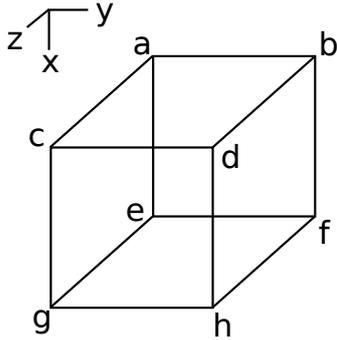


Figure 4: Restriction de u à un bloc S_3 .

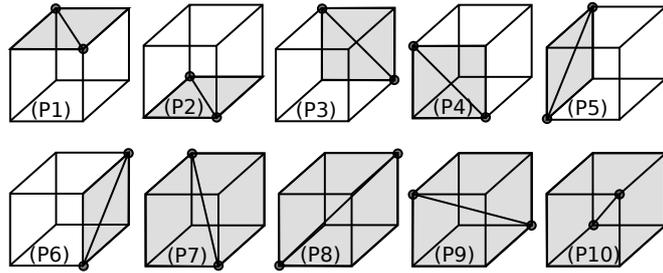


Figure 5: Les dix relations caractéristiques du bien-composé d'une image en niveaux de gris u restreinte à un bloc S_3 .

continuity and interpolation. In *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing – Proceedings of the 11th International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 37–48.

- [NPKT14] NGO P., PASSAT N., KENMOCHI Y., TALBOT H. : Topology-preserving rigid transformation of 2D digital images. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 23, Num. 2 (February 2014), 885–897.
- [RL66] ROSENFELD A., L. P. J. : Sequential operations in digital picture processing. *Journal of the Association of Computing Machinery*. Vol. 13, Num. 4 (octobre 1966), 471–494.
- [Ros70] ROSENFELD A. : Connectivity in digital pictures. *Journal of the Association of Computing Machinery*. Vol. 17, Num. 1 (January 1970), 146–160.
- [TASG11] TUSTISON N., AVANTS B., SIQUEIRA M., GEE J. : Topological well-composedness and glamorous glue : A digital gluing algorithm for topologically constrained front propagation. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 20, Num. 6 (2011), 1756–1761.