Correction du Partiel Théorie des Langages

Dans cette épreuve, les non terminaux sont écrits en majuscules, les terminaux en minuscules ou entre guillemets, et ε désigne le mot vide.

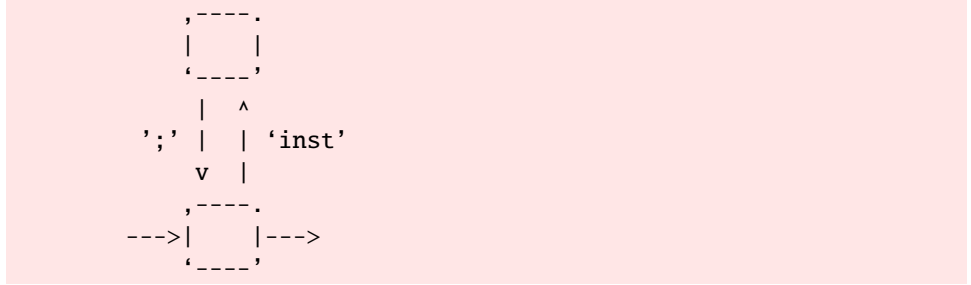
1 Hiérarchie de Chomsky

Pour chacune des grammaires suivantes, préciser (i) son type dans la hiérarchie de Chomsky, (ii) si elle est ambiguë, (iii) le langage qu'elle engendre, (iv) le type du langage dans la hiérarchie, (v) un automate fini qui reconnaisse le même langage.

Justifier vos réponses.

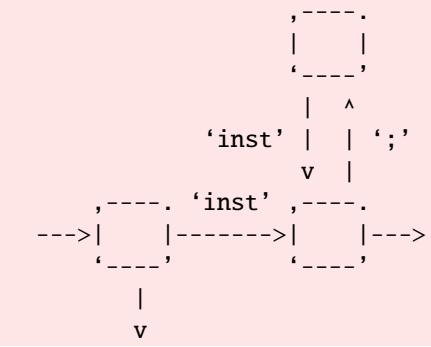
1. `P` $\rightarrow$ `P inst ';'`
   `P` $\rightarrow \varepsilon$

   Correction: Linéaire à gauche, donc régulière. Elle est non ambigüe, et engendre une suite de zéro ou plusieurs `inst` *terminés* par des `;`. Ce langage est infini, régulier (puisqu'engendré par une grammaire régulière) : type 3. Il existe donc un automate, comme par exemple :



2. `P` $\rightarrow$ `P1`
   `P` $\rightarrow \varepsilon$
   `P1` $\rightarrow$ `P1 ';' inst`
   `P1` $\rightarrow$ `inst`

Correction: Linéaire à gauche, donc régulière. Elle est non ambigüe. `P1` engendre une liste de une ou plusieurs `inst` *séparés* par des `;`. Donc, cette grammaire engendre une liste de zéro ou plusieurs `inst` *séparés* par des `;`. Ce langage est infini, régulier (puisqu'engendré par une grammaire régulière) : type 3. Il existe donc un automate, comme par exemple :



3. `P` → `P1`
   `P` → ε
   `P1` → `P1 ';' P1`
   `P1` → `inst`

Correction: Cette grammaire est très visiblement une version ambigüe de la grammaire précédente. On pourrait dire que dans la grammaire l'opérateur `;` est associatif à gauche, ici il est associatif à droite et à gauche, i.e., une phrase comme `inst ; inst ; inst` peut se lire comme `(inst ; inst) ; inst` ou `inst ; (inst ; inst)`. Le langage, lui, reste évidemment de type 3, et reconnu par le même automate.

4. `S` → `P`
   `P` → `p P Q R`
   `P` → `p q R`
   `R Q` → `Q R`
   `q Q` → `q q`
   `q R` → `q r`
   `r R` → `r r`

Correction: Cette grammaire est visiblement monotone, non hors contexte. Bien qu'il ne soit pas simple de le montrer formellement, une "exécution" de cette grammaire à la main montre qu'elle n'est pas ambigüe.
On reconnaît l'exemple de grammaire engendrant $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n$, i.e., le langage des mots commençant par un certain nombre (non nul) de `a`, puis d'autant de `b`, et enfin autant de `c`. Mais avec `p`, `q` et `r`. Ce langage est bien connu comme l'exemple type des langages sensibles au contexte (et non hors-contexte), comme vu en cours.
Bien entendu, il est impossible de trouver un automate fini (le langage n'est pas régulier), ni même un d'automate à pile (le langage n'est pas hors-contexte).

2 Parsage LL(1)

Soit le langage de la logique (dite propositionnelle) composée de deux symboles `t` (vrai) et `f` (faux), de l'opération unaire $\neg$ (non), des opérations binaires $\vee$ (ou) et $\wedge$ (et), et des parenthèses. Ce langage inclut des mots tels que :

$$t \wedge t \qquad t \vee f \qquad (t \wedge t) \vee (f \wedge f)$$

Noter que l'on parle de tout ce langage, et non seulement le sous langage des formules "vraies" ; il comprend donc aussi des mots tels que :

$$f \qquad \neg t \qquad \neg t \wedge f \wedge f \wedge t$$

1. Écrire une grammaire hors contexte naïve de la logique propositionnelle. On cherchera une formulation très lisible, au prix de l'ambiguïté.

   Correction:
   S → S ∧ S
   S → S ∨ S
   S → ¬ S
   S → (S)
   S → t
   S → f

2. Désambiguïser cette grammaire en considérant les règles suivantes :
   (a) ∧ et ∨ sont associatives à gauche ;
   (b) ¬ est prioritaire sur ∧ ;
   (c) ∧ est prioritaire sur ∨.

   c'est-à-dire que $f \vee t \vee f \wedge \neg t \wedge f$ se lit $(f \vee (t \vee ((f \wedge (\neg t)) \wedge f)))$.

   Correction: Comme pour l'arithmétique, on introduit des symboles non-terminaux supplémentaires pour chaque étage de priorité. Par analogie avec l'arithmétique on prendra S (somme) pour l'étage ∨, T (terme) pour l'étage ∧, et F (facteur) pour ¬, les parenthèses, et les valeurs littérales.

   ```
   // Une somme est une somme de termes ou un terme.
   S → S ∨ T
   S → T
   // Un terme est un produit de facteur, ou un facteur.
   T → T ∧ F
   T → F
   // Un facteur et une suite de négations.
   F → ¬ F
   F → ( S )
   F → t
   F → f
   ```

   On remarque la récursivité à gauche des règles pour obtenir l'associativité à gauche.

3. Expliquer pourquoi cette grammaire ne peut pas être LL(1).

   Correction: D'une part elle est récursive à gauche, d'autre part, plusieurs règles sont en concurrence. Par exemple les deux premières règles sont actives pour tout FIRST de T.

4. Transformer cette grammaire en une grammaire susceptible d'être LL(1).

Correction:

(a) Récursion à droite.

```
S → T ∨ S
S → T
T → F ∧ T
T → F
F → ¬ F
F → ( S )
F → t
F → f
```

(b) Factorisation à gauche

```
S  → T S'
S' → ∨ T S'
S' →
T  → F T'
T' → ∧ F T'
T' →
F  → ¬ F
F  → ( S )
F  → t
F  → f
```

5. Quelle critique formuler sur la grammaire obtenue ?

Correction: On a perdu l'associativité gauche des opérateurs.

6. Simplifier cette grammaire en s'autorisant l'utilisation de * dans les règles. Par exemple, `A → a A` et `A →` ε équivaut à `A → a*`.

Correction:

```
S  → T (∨ T) *
T  → F (∧ F) *
F  → ¬ F
F  → ( S )
F  → t
F  → f
```

7. En déduire que l'on peut écrire un parseur LL(1) pour cette grammaire.

Correction: `S` se parse simplement par une routine :

```
routine S ()
  T ()
  tant que lookahead égale ∨ faire
    accepter ∨
    T ()
  fin tant que
fin routine S
```

et de façon similaire pour `T`. Enfin, toutes les règles de `F` commence par un terminal différent.