

# Analyse structurelle de l'influence du bruit sur l'arbre alpha

Baptiste ESTEBAN Guillaume TOCHON Edwin CARLINET Didier VERNA

Laboratoire de Recherche de l'EPITA (LRE), 14-16 Rue Voltaire, 94270 Le Kremlin-Bicêtre, France

**Résumé** – L'arbre alpha est une représentation hiérarchique utilisée dans divers traitements d'une image tels que la segmentation ou la simplification. Ces traitements sont néanmoins sensibles au bruit, ce qui nécessite parfois de les adapter. Or, l'influence du bruit sur la structure de l'arbre alpha n'a été que peu étudiée dans la littérature. Ainsi, nous proposons une étude de l'impact du bruit en fonction de son niveau sur la structure de l'arbre. De plus, nous étendons cette étude à la persistance des nœuds de l'arbre en fonction d'une énergie donnée, et nous concluons que certaines fonctionnelles sont plus sensibles au bruit que d'autres.

**Abstract** – The alpha tree is a hierarchical representation used in different kinds of image processes such as segmentation or simplification. Furthermore, these processes are sensitive to noise. However, the noise impact on the alpha tree structure has been little investigated. Thus, we propose a study of the noise impact related to its level on the tree structure. Moreover, we extend this study to the persistence of the tree nodes, and we conclude that some functionals are more sensitive to noise than others.

## 1 Introduction

Les représentations hiérarchiques sont des outils très utilisés en traitement d'images. Elles sont divisées en deux catégories [1] : les hiérarchies d'*inclusion* et les hiérarchies de *partitions*. Les hiérarchies d'inclusion représentent diverses relations entre les composantes connexes d'une image alors que les hiérarchies de partitions représentent l'empilement de plusieurs partitions dont les régions sont obtenues en respectant un critère donné. Dans cet article, nous étudions les hiérarchies de partitions, et plus particulièrement l'arbre alpha [8]. Cette représentation est utilisée pour plusieurs traitements tels que la segmentation ou la simplification [6] et constitue le fondement de plusieurs hiérarchies plus avancées [3].

Pour évaluer la qualité des hiérarchies de partitions, un ensemble de métriques tel que la précision des contours ou des régions, dans des coupes horizontales et optimales, est proposé et appliqué aux hiérarchies de lignes de partage des eaux [7]. Or, le cas où la hiérarchie est construite sur une image bruitée n'y est pas étudié. L'impact du bruit est néanmoins exploré dans le contexte des représentations hiérarchiques [2], mais uniquement pour l'arbre des formes.

Dans cet article, nous menons une étude de l'impact du bruit sur l'arbre alpha en nous intéressant à ses caractéristiques structurelles, et nous mettons en relation l'évolution de ces caractéristiques en fonction du niveau du bruit dégradant l'image sur laquelle l'arbre a été construit. De plus, nous étudions cet impact en ce qui concerne la quantité de nœuds *non persistants* lorsque l'arbre alpha est transformé en hiérarchie persistante en fonction d'une énergie donnée.

Cet article est structuré de la manière suivante : dans la section 2, nous définissons l'arbre alpha puis nous expliquons le principe de hiérarchie persistante en fonction d'une énergie. Nous étudions l'impact du bruit sur la structure de l'arbre alpha en section 3. La section 4 étend cette étude à la persistance des nœuds de l'arbre. Nous concluons cette étude et donnons ses perspectives en section 5.

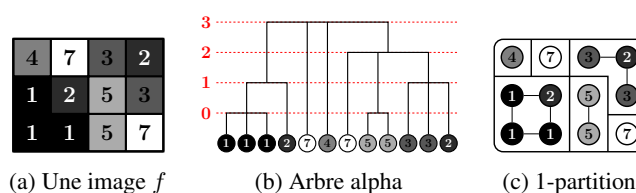


FIGURE 1 : Illustration de l'arbre alpha

## 2 Représentations hiérarchiques

### 2.1 L'arbre alpha

Soit  $f: \Omega \rightarrow I$  une image définie sur un domaine  $\Omega$  dont les éléments ont une valeur dans  $I$ . Deux points  $p, q \in \Omega$  sont dit  $\alpha$ -connexes s'il existe un chemin  $(p \rightarrow q) = (x_0 = p, \dots, x_{n-1} = q)$  composé de  $n$  points consécutifs d'après une relation d'adjacence tel que pour une mesure de dissimilarité  $w$  entre 2 points consécutifs  $x_i$  et  $x_{i+1}$  de ce chemin,  $w(f(x_i), f(x_{i+1})) \leq \alpha$ . Une  $\alpha$ -composante connexe est une composante connexe composée de points  $\alpha$ -connexes. De ce fait, une 0-composante connexe est une zone plate de l'image. Une  $\alpha$ -partition  $\alpha$ -P est un ensemble d' $\alpha$ -composantes connexes disjointes dont l'union est  $\Omega$ . Ainsi, l'arbre alpha, dénoté par  $\mathcal{T}_\alpha$ , est la représentation arborescente de la hiérarchie  $\mathcal{H}_\alpha = (\alpha_0\text{-P}, \dots, \alpha_{m-1}\text{-P})$ , composée des  $m$   $\alpha$ -partition d'une image, pour laquelle chaque nœud représente une  $\alpha$ -composante connexe étant la fusion des  $\alpha$ -composantes connexes représentées par ses enfants.

Ces concepts sont illustrés en Figure 1. L'arbre alpha est construit sur l'image de la Figure 1a en utilisant une dissimilarité  $L_1$  et est représenté sous la forme d'un dendrogramme en Figure 1b. Chaque pixel de l'image est en feuille et chaque nœud interne représente la fusion de deux ou plusieurs éléments. Les valeurs en rouge à gauche de l'arbre représentent la valeur  $\alpha$  de chaque  $\alpha$ -composante connexe. Finalement, la 1-partition de la hiérarchie est donnée en Figure 1c.

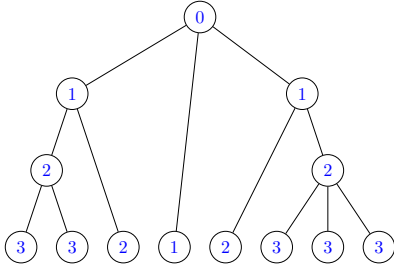


FIGURE 2 : Profondeur des nœuds de  $\mathcal{T}$ .

## 2.2 Les hiérarchies persistantes

Chaque région  $R$  d'une hiérarchie de partitions apparaît dans une partition pour un certain ensemble continu de valeur d'échelle associée à la hiérarchie. Ainsi, il est possible de définir un intervalle  $\Lambda(R) = [\lambda^+(R), \lambda^-(R)[$  représentant cet ensemble, nommé *intervalle de persistance*, où  $\lambda^+(R)$  est l'*échelle d'apparition* de  $R$  et  $\lambda^-(R)$  est son *échelle de disparition*. Ainsi, pour une région  $R_\alpha$  représentée par un nœud  $r_\alpha$  d'un arbre alpha  $\mathcal{T}_\alpha$ ,  $\lambda^+(R_\alpha)$  est la valeur  $\alpha$  associée à  $r_\alpha$  et  $\lambda^-(R_\alpha)$  est la valeur  $\alpha$  associée à la région représentée par le nœud parent de  $r_\alpha$  dans  $\mathcal{T}_\alpha$ . L'échelle de disparition de la région représentée par la racine de  $\mathcal{T}_\alpha$  vaut  $+\infty$ .

De nombreuses approches en traitement d'image pour des problèmes de segmentation ou de débruitage s'appuient sur la minimisation d'une énergie donnée. Guigues *et al.* [4] proposent d'appliquer ce principe aux hiérarchies de partitions pour obtenir une coupe  $\zeta$  de la hiérarchie, représentant un ensemble de régions disjointes  $R_i$  appartenant à la hiérarchie avec  $\cup R_i = \Omega$ , qui est optimale en fonction d'une énergie séparable de la forme

$$E_\lambda(C) = \sum_{R_i \in \zeta} D(R_i) + \lambda \sum_{R_i \in \zeta} C(R_i)$$

avec  $D(R_i)$  un terme d'attache aux données de  $R_i$ ,  $C(R_i)$  un terme de régularisation et  $\lambda$  un paramètre de cette énergie. Ainsi, en faisant varier  $\lambda$ , différentes coupes optimales d'une hiérarchie sont obtenues. Ce paramètre devient un paramètre d'échelle et il est possible d'obtenir un intervalle de persistance pour chaque nœud par le biais d'un problème de programmation dynamique fonctionnelle [4] en soumettant à chaque nœud  $r$  de l'arbre une énergie  $E_r(\lambda) = \lambda C(r) + D(r)$ . Ce procédé fait apparaître des nœuds *non persistants* qui n'appartiennent à aucune coupe optimale, avec  $\lambda^-(r) \leq \lambda^+(r)$ , qui sont supprimés de la hiérarchie, résultant en une *hiérarchie persistante*.

## 3 Impact du bruit sur la structure

Dans la suite de cet article, une image bruitée est définie par  $f_\sigma = f + n_\sigma$  avec  $n_\sigma$  un tirage de valeurs à partir d'une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . L'image constante  $f_c$  est une version particulière de  $f$  telle que  $\forall p \in \Omega, f_c(p) = c$ , et sa version bruitée est dénotée par  $f_{c,\sigma}$ . Dans l'ensemble des expérimentations menées, l'ensemble de valeurs  $I$  est inclus ou égale à  $\llbracket 0 - 255 \rrbracket$ , avec une saturation en cas de dépassement. L'ensemble des 150 images naturelles utilisées provient de la base d'images de Laurent CONDAT<sup>1</sup>.

<sup>1</sup><https://lcondat.github.io/imagebase.html>

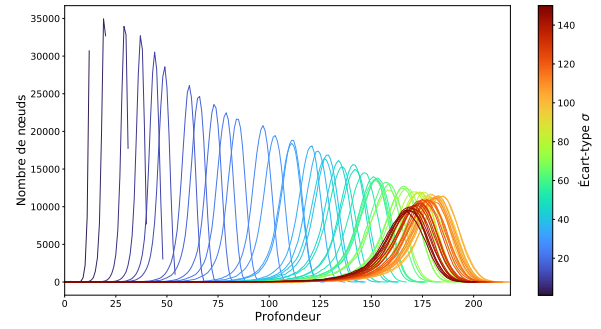


FIGURE 3 : Distribution  $h_{c,\sigma}$ .

## 3.1 Étude à partir d'une image constante

L'attribut structural étudié est la *profondeur*  $\mathcal{P}_\mathcal{T}(r)$  de chaque nœud  $r$  d'un arbre  $\mathcal{T}$ , définie par

$$\mathcal{P}_\mathcal{T}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est la racine de } \mathcal{T} \\ \mathcal{P}(r_p) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $r_p$  le nœud parent de  $r$  dans  $\mathcal{T}$ . Cet attribut est illustré par la Figure 2, où la profondeur de chaque nœud est son étiquette. La distribution de la profondeur des nœuds de l'arbre  $\mathcal{T}$  est étudiée pour évaluer l'impact du bruit sur sa structure. Cette distribution est obtenue par le biais d'un histogramme  $h(d) = |\{r \in \mathcal{T} | \mathcal{P}_\mathcal{T}(r) = d\}|$  pour chaque profondeur  $d \in \mathcal{P}_\mathcal{T}$ . Le mode de  $h$  est défini par  $m(h) = \operatorname{argmax}_{d \in \mathcal{P}_\mathcal{T}} h(d)$  et la moyenne de  $h$  par  $\mu(h) = \frac{1}{|\mathcal{P}_\mathcal{T}|} \sum_{d \in \mathcal{P}_\mathcal{T}} h(d)$ . Les distributions de la profondeur des arbres alpha construits sur  $f_\sigma$  et  $f_{c,\sigma}$  sont respectivement dénotées par  $h_\sigma$  et  $h_{c,\sigma}$ .

Dans cette partie, les distributions des profondeurs de l'arbre alpha sont construites sur un ensemble d'images  $f_{c,\sigma}$ , avec  $\sigma$  variant entre 1 et 150. Cela permet d'étudier le cas où un arbre alpha est construit sur une image ne contenant que du bruit, sans aucune autre information de texture. Ces distributions sont affichées en Figure 3. Dans cette figure, les histogrammes  $h_{c,\sigma}$  sont affichés sous la forme de courbe, dont la couleur représente le paramètre  $\sigma$  du bruit contenu dans  $f_{c,\sigma}$  et dont l'intensité est indiquée dans la barre de couleur.

Cette figure donne plusieurs informations sur l'évolution de la structure de l'arbre en fonction du bruit. Premièrement, au fur et à mesure que le niveau de bruit augmente, la distribution des profondeurs prend la forme d'une distribution à queue pour des nœuds à faibles profondeurs. Ces nœuds sont le produit de la fusion entre une  $\alpha$ -composante connexe et de petites régions, généralement de la taille d'un pixel et avec des valeurs très éloignées de celles de la composante. Ensuite, ces courbes indiquent un accroissement du mode de la distribution quand le bruit augmente jusqu'à un certain niveau de bruit, puis une décroissance de ce mode à très fort niveau de bruit. Cette décroissance est due au rognage des valeurs aux bornes de  $I$  lors du bruitage d'une image, celui-ci pouvant créer de nouvelles zones plates.

## 3.2 Comparaison avec des images naturelles

Dans cette partie, l'impact du bruit sur la structure d'un arbre construit à partir d'une image naturelle  $f_\sigma$  est comparé aux résultats de la partie précédente sur un arbre construit sur  $f_{c,\sigma}$ .

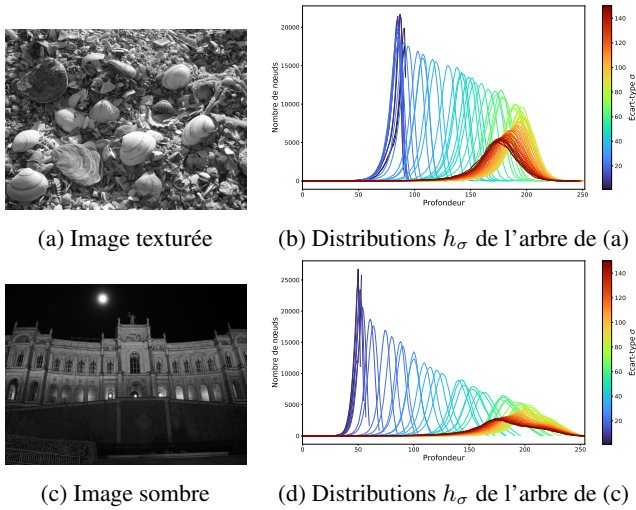


FIGURE 4 : Distributions de la profondeur des arbres alpha construits à partir de deux images aux propriétés différentes.

Tout d'abord, l'évolution des distributions de la profondeur  $h_\sigma$  obtenues à partir des arbres alpha construits sur les images des Figures 4a et 4c est observée respectivement dans les Figures 4b et 4d. Ces deux images possèdent des caractéristiques intéressantes dans l'étude du bruit telles qu'une forte texture ou une faible luminosité, éléments d'une image susceptibles de se mélanger avec le bruit. Pour étudier l'évolution de l'impact structurel, les distributions des profondeurs obtenues à partir des arbres alpha construits sur ces images sont observées de manière similaire à celle de la partie précédente.

Ces deux ensembles de distributions ont un comportement similaire à la distribution de l'arbre alpha construit sur  $f_{c,\sigma}$ . Premièrement, le mode des distributions évolue de manière croissante quand le niveau de bruit augmente jusqu'à un certain niveau  $\sigma$ , puis décroît lentement. Ensuite, la variance de chaque distribution a une croissance concomitante avec l'évolution du niveau de bruit. Néanmoins, certaines différences sont observables entre les distributions  $h_\sigma$ , mais aussi avec  $h_{c,\sigma}$ . Premièrement, le mode des distributions à faibles niveaux de bruit est plus élevé pour  $h_\sigma$  que ceux de  $h_{c,\sigma}$ . Cela est due au contenu de l'image naturelle qui, contrairement à  $f_c$ , possède de la texture. Par conséquent, pour  $\sigma$  suffisamment faible, le contenu de l'image reste prédominant, comme le montrent les distributions  $h_\sigma$  possédant des modes similaires. Enfin, les distributions de la Figure 4d montrent que pour une image sombre, la variance des profondeurs des nœuds à forts niveaux de bruit est plus élevée, cela montrant l'impact du bruit sur des arbres construits à partir d'images ayant une faible luminosité.

Après l'analyse de l'impact du bruit sur la structure des arbres construits sur ces deux images, l'ensemble de la base d'images est utilisé. Pour cela, un arbre alpha est construit sur  $f_\sigma$  et la moyenne  $\mu(h_\sigma)$  de la distribution de profondeur  $h_\sigma$  est calculée. Cela est effectué  $N$  fois pour chaque image afin d'obtenir la moyenne  $\mathcal{M}(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mu((h_\sigma)_i)$ , avec  $(h_\sigma)_i$  la  $i^{\text{ème}}$  distribution des profondeurs. Ce procédé est réalisé sur chaque image donnée de la base pour chaque niveau de bruit  $\sigma$  variant entre 1 et 150, résultant ainsi des courbes de la Figure 5. Chaque courbe en tiret illustre l'évolution de la profondeur moyenne d'une hiérarchie pour une image en fonction du bruit. La courbe en rouge illustre la même expérience sur  $f_{c,\sigma}$  pour comparer les arbres alpha des images bruitées avec celles du

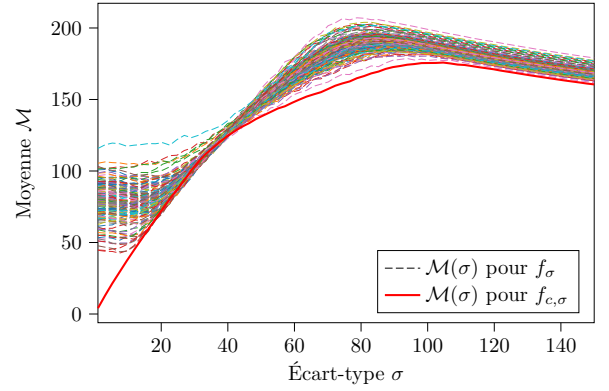


FIGURE 5 : Comparaison de l'évolution des profondeurs moyennes sur l'ensemble des images de la base d'image avec les images constantes bruitées.

bruit. Les moyennes  $\mathcal{M}(\sigma)$ , à faibles niveaux de bruit  $\sigma$ , sont beaucoup plus élevées que pour l'image constante. Cette évolution est vraie pour une majorité des moyennes sur tous les niveaux de bruit. Ainsi, on en déduit que malgré le bruit, le contenu de l'image a toujours un impact sur les profondeurs de l'arbre alpha  $\mathcal{T}_\alpha$ , comme évoqué précédemment. Enfin, pour toutes les images, on observe qu'à un certain niveau de bruit, les courbes de  $\mathcal{M}(\sigma)$  décroissent. Cela peut venir du bornage, tel qu'observé sur les distributions des profondeurs des nœuds de  $\mathcal{T}_\alpha$ .

## 4 Impact sur la persistance des nœuds

Dans cette partie, son étude s'effectue dans le contexte du passage d'un arbre alpha à une hiérarchie persistante en fonction d'une énergie affine donnée. Dans un premier temps, la fonctionnelle de Mumford-Shah constante par morceaux [5] est utilisée. Pour un nœud  $r$  de  $\mathcal{T}_\alpha$  représentant une région  $R$  de  $f$ , elle est définie par

$$E_{ms,r}(\lambda) = \sum_{p \in R} (f(p) - \tilde{f}(p))^2 + \lambda |\partial R|$$

avec  $\tilde{f}$  la moyenne des valeurs de la région  $R$  et  $\partial R$  l'ensemble des éléments aux contours de l'image. Cette fonctionnelle est ensuite modifiée pour utiliser la somme des valeurs du gradient aux contours d'une région au lieu de la taille de ces contours. Cette fonctionnelle, dénotée par  $E_{cs,r}$ , est définie par

$$E_{cs,r}(\lambda) = \sum_{p \in R} (f(p) - \tilde{f}(p))^2 + \lambda \sum_{p \in \partial R} g(p)$$

avec  $g$  l'ensemble des valeurs aux contours de l'image calculées en utilisant la fonction de dissimilarité  $w$  entre deux pixels adjacents servant à construire  $\mathcal{T}_\alpha$ . Ce changement de terme de régularisation se justifie par le fait qu'une région avec une faible variance mais un fort gradient le long de son contour est très probablement contrastée par rapport à son voisinage et donc plus susceptible d'être moins impactée par le bruit dans l'image à partir de laquelle l'arbre alpha est construit.

Pour comparer ces deux fonctionnelles, mais surtout l'impact du bruit sur la persistance des nœuds de l'arbre, le pourcentage de nœuds non persistants par rapport aux énergies  $E_{ms,r}$  et  $E_{cs,r}$  en fonction du niveau de bruit  $\sigma$  est calculé à

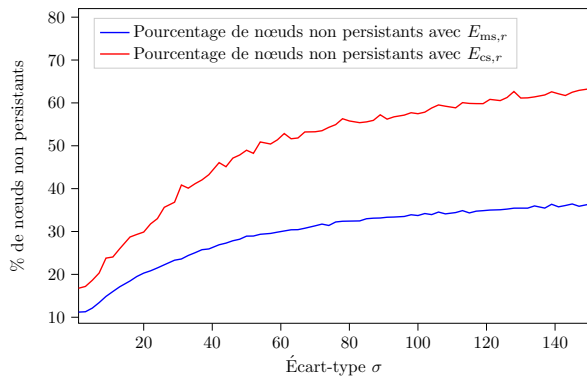


FIGURE 6 : Évolution du pourcentage de nœuds non persistants d'un arbre alpha en fonction du niveau de bruit  $\sigma$ .

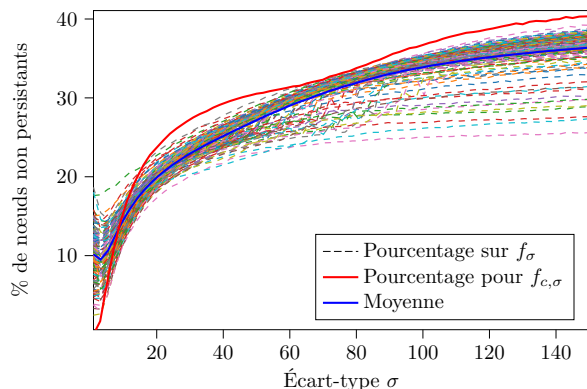


FIGURE 7 : Pourcentage de nœuds non persistants en fonction du niveau de bruit (avec  $E_{ms,r}$ ).

partir d'un arbre alpha construit sur l'image de la Figure 4a et affiché dans la Figure 6. Ces courbes montrent un comportement similaire aux deux fonctionnelles : quand le niveau de bruit augmente, le pourcentage de suppression s'accroît. De plus, il y a un plus grand nombre de nœuds non persistants quand  $E_{cs,r}$  est utilisée par rapport à  $E_{ms,r}$ . Ce pourcentage est jusqu'à deux fois plus élevé à fort niveaux de bruit pour  $E_{cs,r}$  par rapport à  $E_{ms,r}$ .

Le comportement des courbes de pourcentages de nœuds non persistants est confirmé sur toute la base d'image et illustré pour  $E_{ms,r}$  et  $E_{cs,r}$  respectivement dans les Figures 7 et 8. La moyenne du nombre de nœuds non persistants à chaque niveau de bruit est illustré par la courbe bleue. De plus, pour comparer avec le bruit, ces pourcentages ont aussi été calculés sur des arbres alpha construits à partir de l'image constante  $f_{c,\sigma}$  et sont illustrés par les courbes rouges. Ces courbes de nœuds non persistants dans l'arbre alpha construit à partir de  $f_{c,\sigma}$  ont des comportements très différents pour un niveau de bruit très faible : alors que pour  $E_{ms,r}$ , le pourcentage de nœuds non persistants est nul, il est proche de 90% pour  $E_{cs,r}$ . Cela démontre que même si le bruit est faible,  $E_{cs,r}$  est sensible à celui-ci. Enfin, à mesure que le niveau de bruit augmente, le pourcentage de nœud non persistants d'un arbre alpha construit sur  $f_{c,\sigma}$  se rapproche de la moyenne pour les arbres construits sur  $f_\sigma$ , notamment quand  $E_{cs,r}$  est utilisée. Cette observation permet de conclure que  $E_{cs,r}$  est plus sensible au bruit structurellement que  $E_{ms,r}$ .

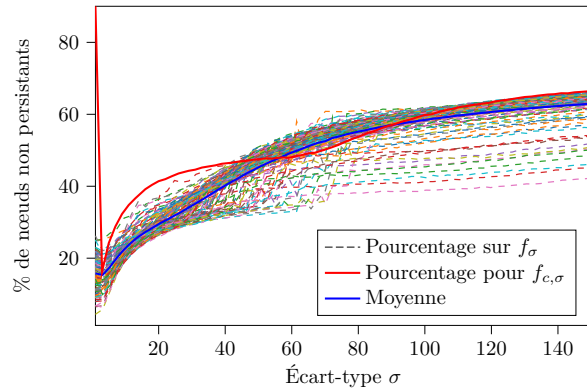


FIGURE 8 : Pourcentage de nœuds non persistants en fonction du niveau de bruit (avec  $E_{cs,r}$ ).

## 5 Conclusions et perspectives

Nous avons étudié l'impact d'un bruit additif gaussien sur la structure de l'arbre alpha, notamment en observant l'évolution de la profondeur de chaque nœud. Nous avons montré la relation entre la profondeur moyenne de ces nœuds et le niveau du bruit altérant une image. De plus, nous avons observé que cette relation varie en fonction du contenu de l'image, notamment lorsque celui-ci est sombre ou texturé. Enfin, nous avons étendu notre étude à l'optimisation d'une fonction d'énergie affine sur les nœuds de l'arbre alpha et montré que le bruit impacte le pourcentage de nœuds non persistant, notamment dans le cas de l'utilisation de la somme du gradient comme terme de régularisation. Nous prévoyons d'étendre cette étude à différents types de bruit puis de la généraliser à différentes hiérarchies de partition tel que l'arbre  $\omega$  [8], les hiérarchies de lignes de partage des eaux ou les arbres de partition binaire, mais aussi à des hiérarchies d'inclusion.

## Références

- [1] Petra BOSILJ, Ewa KIJAK et Sébastien LEFÈVRE : Partition and inclusion hierarchies of images : A comprehensive survey. *Journal of Imaging*, 2018.
- [2] Nicolas BOUTRY et Guillaume TOCHON : Stability of the tree of shapes to additive noise. *In Discrete Geometry and Mathematical Morphology*, 2021.
- [3] Jean COUSTY, Laurent NAJMAN et Benjamin PERRET : Constructive links between some morphological hierarchies on edge-weighted graphs. *In Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, 2013.
- [4] Laurent GUIGUES, Jean-Pierre COCQUEREZ et Hervé LE MEN : Scale-sets image analysis. *International Journal of Computer Vision*, 2006.
- [5] David MUMFORD et Jayant SHAH : Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989.
- [6] Benjamin PERRET, Jean COUSTY, Silvio Jamil FERZOLI GUIMARÃES, Yukiko KENMOCHI et Laurent NAJMAN : Removing non-significant regions in hierarchical clustering and segmentation. *Pattern Recognition Letters*, 2019.
- [7] Benjamin PERRET, Jean COUSTY, Silvio Jamil F. GUIMARÃES et Deise S. MAIA : Evaluation of hierarchical watersheds. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2018.
- [8] Pierre SOILLE : Constrained connectivity for hierarchical image partitioning and simplification. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2008.