Examen d'Elements Finis

Olivier Ricou

Mai 2006

Durée de l'examen : 3 heures.

Seules sont autorisées les notes manuscrites.

1 Exercice

Définition 1 *Une méthode itérative de la forme* $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{f}$ *est dite consistance avec le système* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *si la limite* $\boldsymbol{x}_n$ *de la méthode itérative lorsque* $n \to \infty$ *est la solution du système.*

On veut résoudre le système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ défini par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

avec la méthode itérative suivante

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{B}(\alpha)\,\mathbf{x}_n + \mathbf{g}(\alpha), \quad \text{avec } \mathbf{x}_0 \text{ donné} \tag{2}$$

où α est un paramètre réel et

$$\mathbf{B}(\alpha) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 & -2\alpha^2 + 2\alpha + 1 \\ -2\alpha^2 + 2\alpha + 1 & 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1/2 - \alpha \\ 1/2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Question 1.1 *Calculer la solution du systeme* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *avec* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{b}$ *donnés en (1).*

Question 1.2 *Vérifier que la méthode itérative (2) est consistante pour tout* α*.*

Question 1.3 *Calculer les valeurs propres de* $\boldsymbol{B}(\alpha)$*.*

Question 1.4 *Déterminer les valeurs de* α *pour lesquelles la méthode est convergente.*

Question 1.5 *Calculer la valeur de* α *qui offre le taux de convergence maximal.*

2 Problème

Les équations de Stokes simulent un écoulement laminaire très lent. Dans le cas d'un écoulement stationnaire pour un fluide incompressible et newtonien (de l'eau par exemple), on a

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \rho\,\mathbf{f} \\ \nabla.\mathbf{u} &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

avec μ la viscosité et ρ la densité. $\mathbf{f}$ représente les forces exercées sur le fluide.

Les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$ d'écoulement et la pression p.

En deux dimensions on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu(\partial_{xx}u_x + \partial_{yy}u_x) + \partial_x p & = & \rho\, f_x, \\ -\mu(\partial_{xx}u_y + \partial_{yy}u_y) + \partial_y p & = & \rho\, f_y, \\ \partial_x u_x + \partial_y u_y & = & 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Question 2.1 *En choisissant les fonctions tests dans l'espace* $V(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^2 \ / \ \nabla.\boldsymbol{v} = 0\}$, *écrire la formulation variationnelle de (4) sous une forme qui ne fait pas intervenir la pression.*

Question 2.2 *Montrer que le problème écrit sous sa forme variationnelle a une solution unique. On rappel que la semi-norme 1 pour un vecteur de fonctions* $\boldsymbol{v}$ *est*

$$|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \tag{5}$$

avec n *la dimension du vecteur.*

Soit le maillage suivant

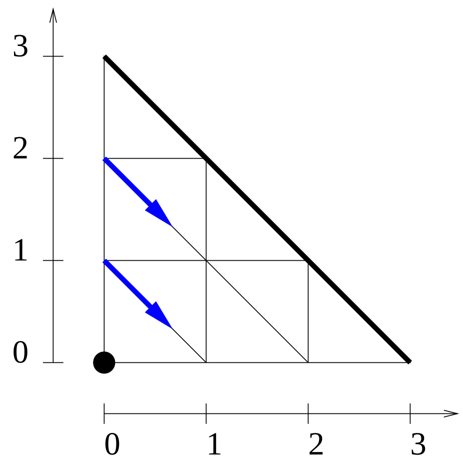

FIG. 1 – Un petit maillage

On impose comme conditions aux frontières :

– une vitesse nulle sur les murs à savoir le point en bas à gauche et le bord à 45 degré (en gras),
– une vistesse égale à (1,-1) sur les 2 points de l'entrée qui ne sont pas des murs (les flèches),
– une pression égale à 1 à l'entrée c.a.d. sur les 4 points verticaux du bord gauche.

Question 2.3 *Quelle est la taille de la matrice pour résoudre notre problème sur ce maillage ?*

Question 2.4 *En utilisant la méthode de Galerkin, écrire le système matriciel pour résoudre notre problème sur ce maillage à l'aide d'éléments P1. On sera très précis sur les calculs permettant d'arriver au système matriciel.*