TD d'Algo n^o 4

EPITA ING1 2012; A. Duret-Lutz

3 décembre 2009

1 Partition équilibrée

On considère un ensemble de n personnes qui souhaitent monter à bord d'un vieux rafiot instable. Pour simplifier, on suppose que les personnes vont s'asseoir soit à bâbord, soit à tribord. Pour équilibrer le bateau, on voudrait que la somme des poids des personnes assises à bâbord soit le plus proche possible de la somme des poids des personnes assises à tribord.

On désire un algorithme pour placer les personnes sur le bateau de façon optimale.

Numérotons $1, 2, \ldots, n$ les passagers, et notons $w_1, w_2, \ldots, w_n$ leurs poids respectifs. On supposera ces poids entiers pris dans $[\![1, k]\!]$, k étant le poids de la personne la plus lourde.

Notons S_B et S_T les ensembles de personnes assises respectivement à bâbord et tribord, et notons $W_B = \sum_{k \in S_B} w_k$ et $W_T = \sum_{k \in S_T} w_k$ les poids de ces deux groupes de personnes.

Avec ces notations, nous pouvons exprimer le problème ainsi : on cherche S_B et S_T tels que $S_B \uplus S_T = \{1, \ldots, n\}$ et de façon à minimiser $|W_B - W_T|$.

1.1 Tentatives gloutonnes

1. Imaginons l'algorithme suivant : les personnes montent à bord du bateau une à une, et sont envoyées du côté où le poids total est le plus faible (un niveau à bulle suffit pour décider).

   Donnez une séquence de poids (correspondant aux passagers embarquant) telle qu'après l'embarquement le bâteau soit déséquilibré, alors qu'il aurait pu être parfaitement équilibré avec un autre arrangement des passagers.

2. Améliorons l'algorithme en faisant embarquer les personnes par poids décroissants.

   Trouvez une séquence de poids décroissants qui déséquilibre le bâteau alors que cela aurait pu être à nouveau évité.

1.2 Programmation dynamique

1. En fonction de $w_1, \ldots, w_n$, quelle serait la valeur idéale de W_B et W_T ? (Idéale au sens où $|W_B - W_T| = 0$, même si l'on sait que ce cas ne sera pas forcément atteint.) Notons W_I cette valeur idéale.

2. Combien de partitions faudrait-il évaluer si l'on voulait trouver la partition optimale en les énumérant toutes ?

3. Soit $P(i, m)$ une fonction booléene qui indique s'il existe un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, i\}$ (les i premiers voyageurs) dont le poids total est **exactement** m.

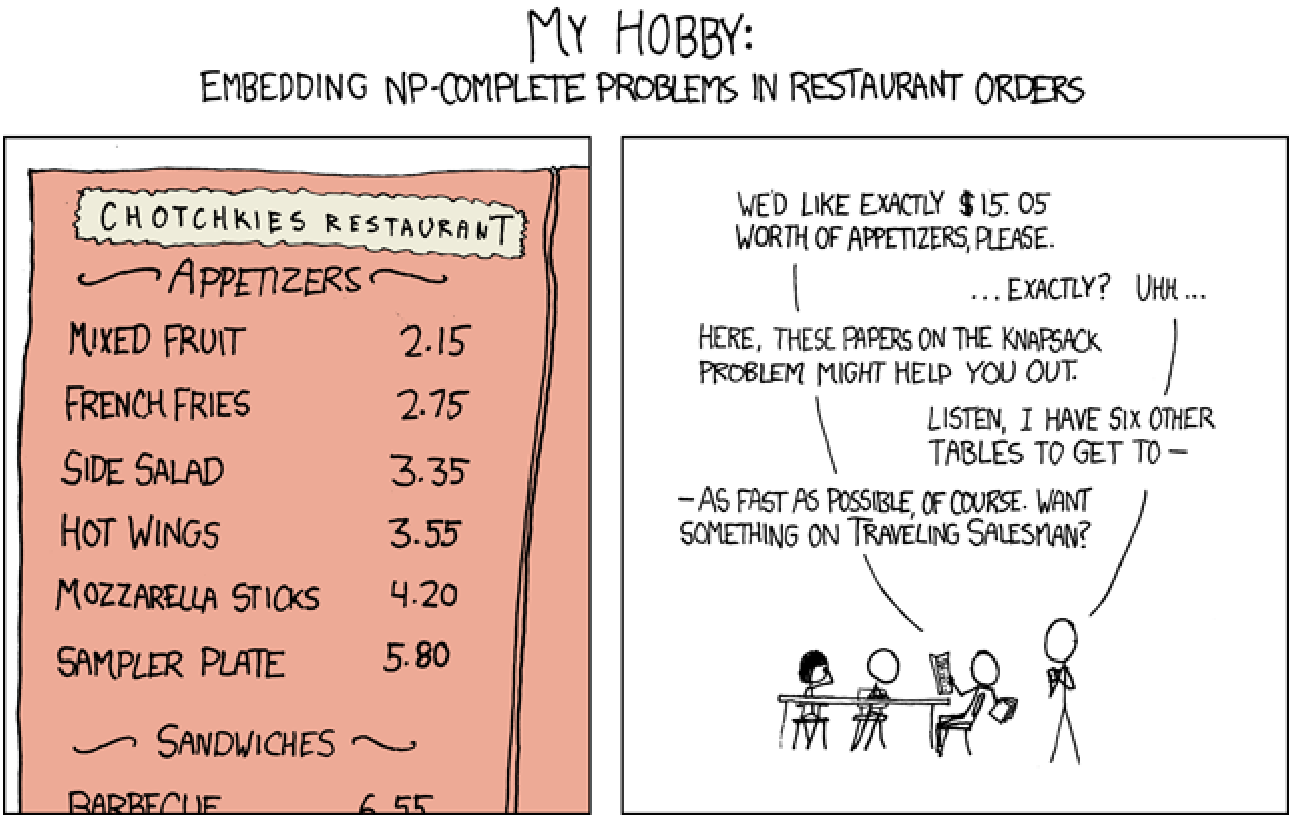
   Quels sont les domaines de valeur des arguments de P : i et m ?

4. Donnez une définition récursive de $P(i, m)$.

5. Calculez $P(i, m)$ pour toutes les valeurs de i et m pour l'ensemble des poids suivants : $\{19, 6, 14, 9, 17\}$. Présentez les résultats sous forme d'un tableau.
6. Quelle est la complexité d'un algorithme qui compléterait un tableau donnant toutes les valeurs $P(i, m)$?
7. Où trouver dans ce tableau le poids p d'un groupe qui s'approche le plus du poids idéal ?
8. À partir de p et W_I comment peut-on donner la valeur minimale de $|W_B - W_T|$?
9. Calculez la valeur minimale de $|W_B - W_T|$ pour les poids $\{19, 6, 14, 9, 17\}$.
10. Comment modifier l'algorithme pour retrouver les personnes à mettre dans le bon groupe ?
11. Écrivez l'algorithme qui à partir de l'ensemble des poids retourne le tableau des valeurs de P.
12. Écrivez l'algorithme qui à partir du tableau des valeurs de P retourne deux ensembles S_B et S_T tels que $|W_B - W_T|$ soit minimal.

2 Knapsack

Quel est le lien entre le problème précédent et ceci :



`http://xkcd.com/287/` — Randall Munroe — Creative Commons by-nc 2.5 License