# Introduction au Model Checking

Alexandre Duret-Lutz & Etienne Renault
http://www.lrde.epita.fr/~adl/ens/mc/2016/

8 février 2016

# Plan du Cours

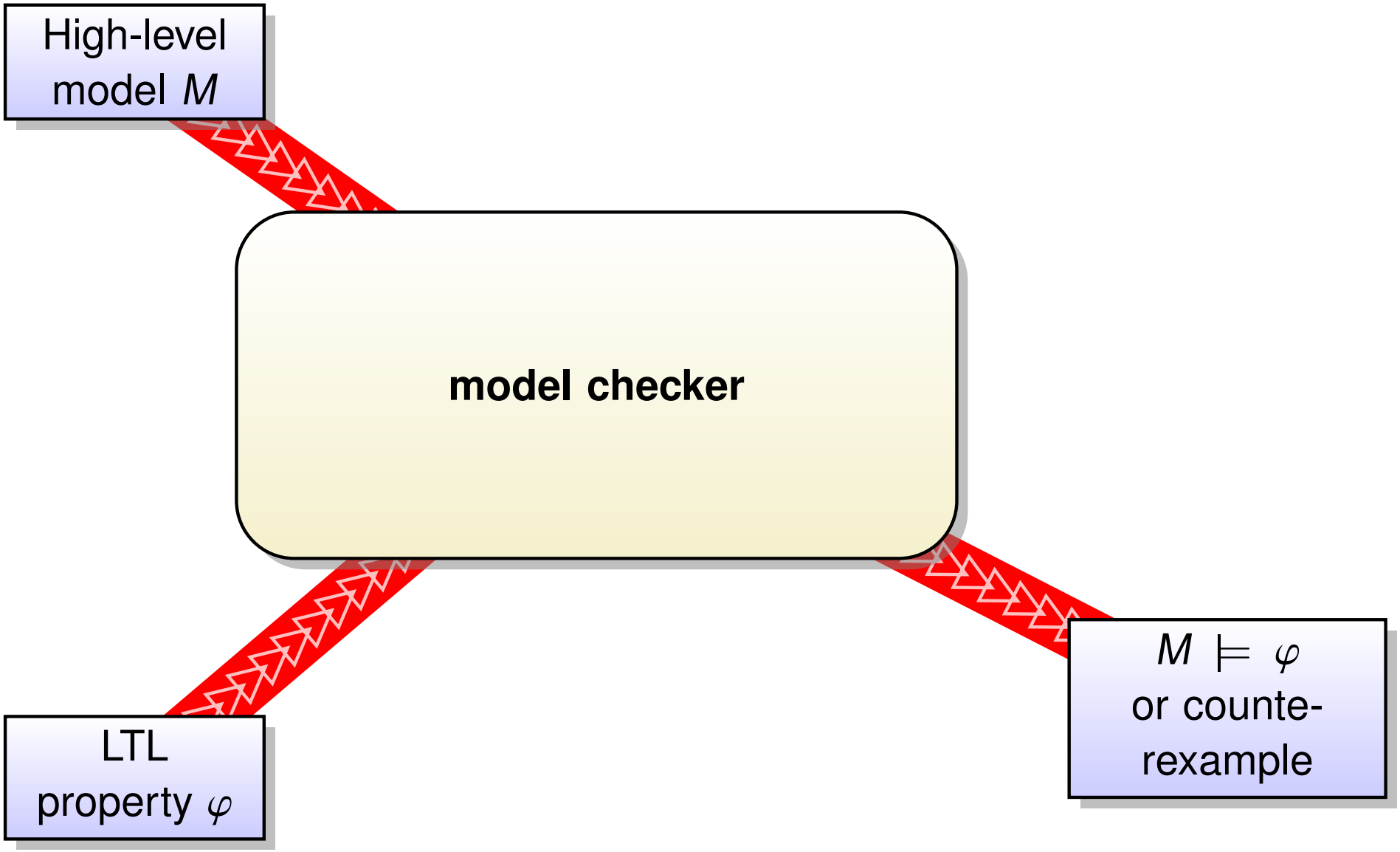
| | |
|---|---|
| 9 fév. 2016 (ADL) | ▶ Introduction<br>▶ Approche par automate du Model checking<br>▶ LTL et Automate de Büchi (TP) |
| 16 fév. 2016 (ER) | ▶ Approche par automate du Model checking<br>▶ Construction d'un Model Checker (TP) |
| 23 fév. 2016 (ADL) | ▶ QCM sur article à lire<br>▶ Binary Decision Diagrams |
| 1 mars 2016 (ADL) | ▶ QCM sur article à lire<br>▶ SAT solvers |
| 15 mars 2016 (ER) | ▶ Test de vacuité des automates de Büchi<br>▶ Fiche de lecture à rendre |
| 22 mars 2016 (ER) | ▶ QCM sur article ? (pas sûr)<br>▶ Réduction des systèmes par ordre partiel |

# Démo

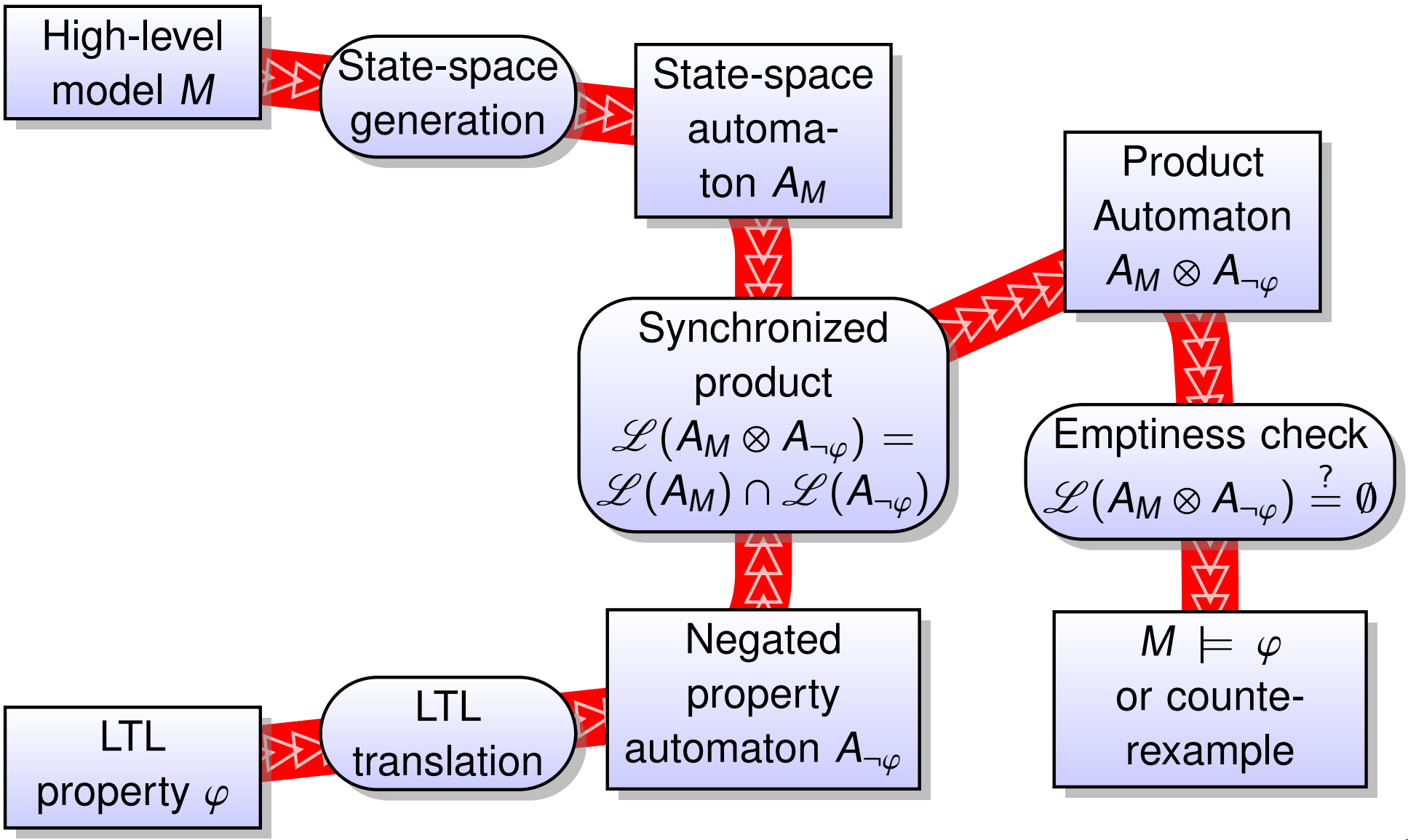
| | |
|---|---|
| système | un modèle d'ascenseur, de ses usagers, et du contrôleur de l'ascenseur |
| spécification | une propriété que les comportements du système doivent vérifier |

Le model checker vérifie (de façon **exhaustive** et **automatique**) que tous les comportement du système satisfont le modèle.

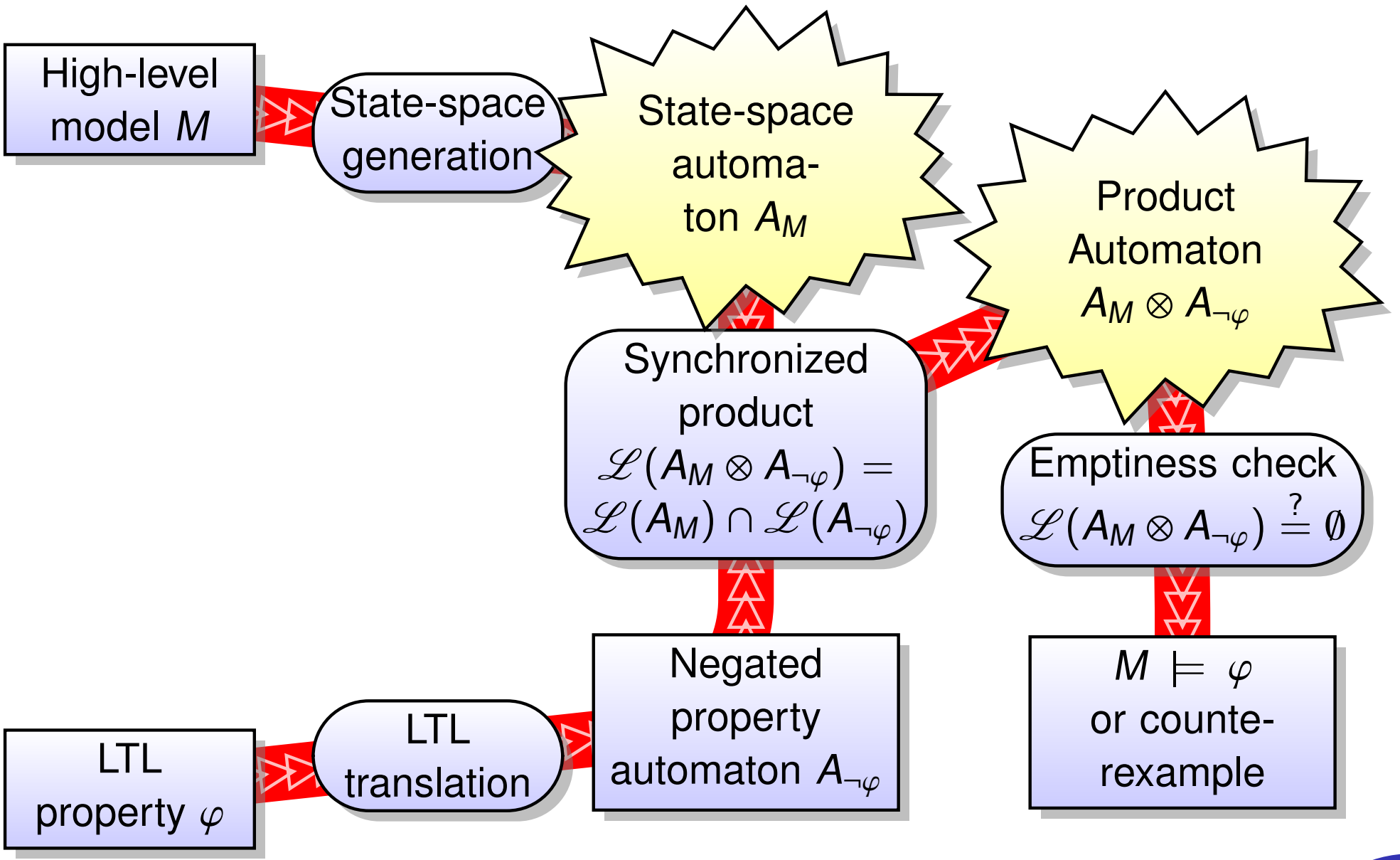
# Approche par automate du model checking



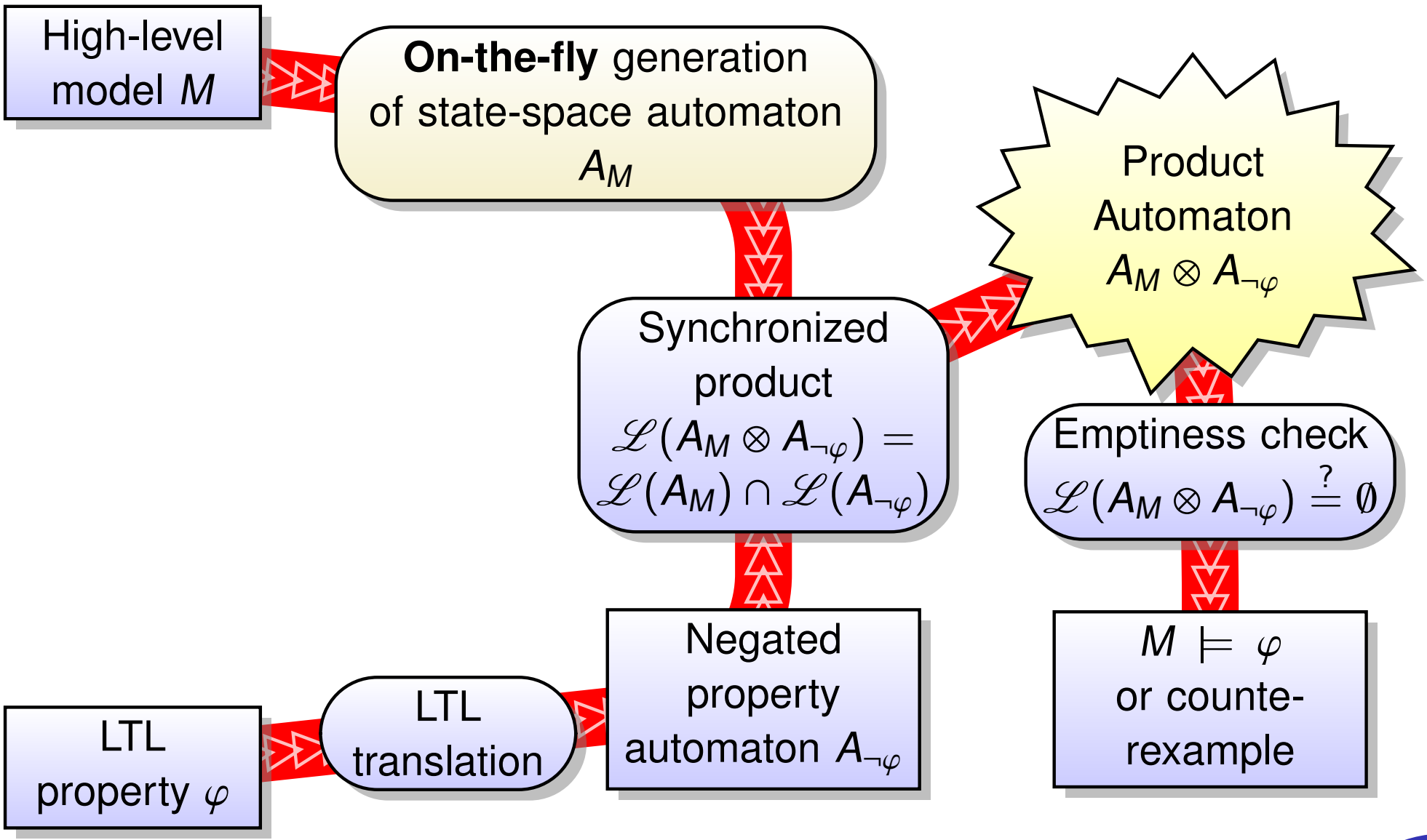
# Approche par automate du model checking



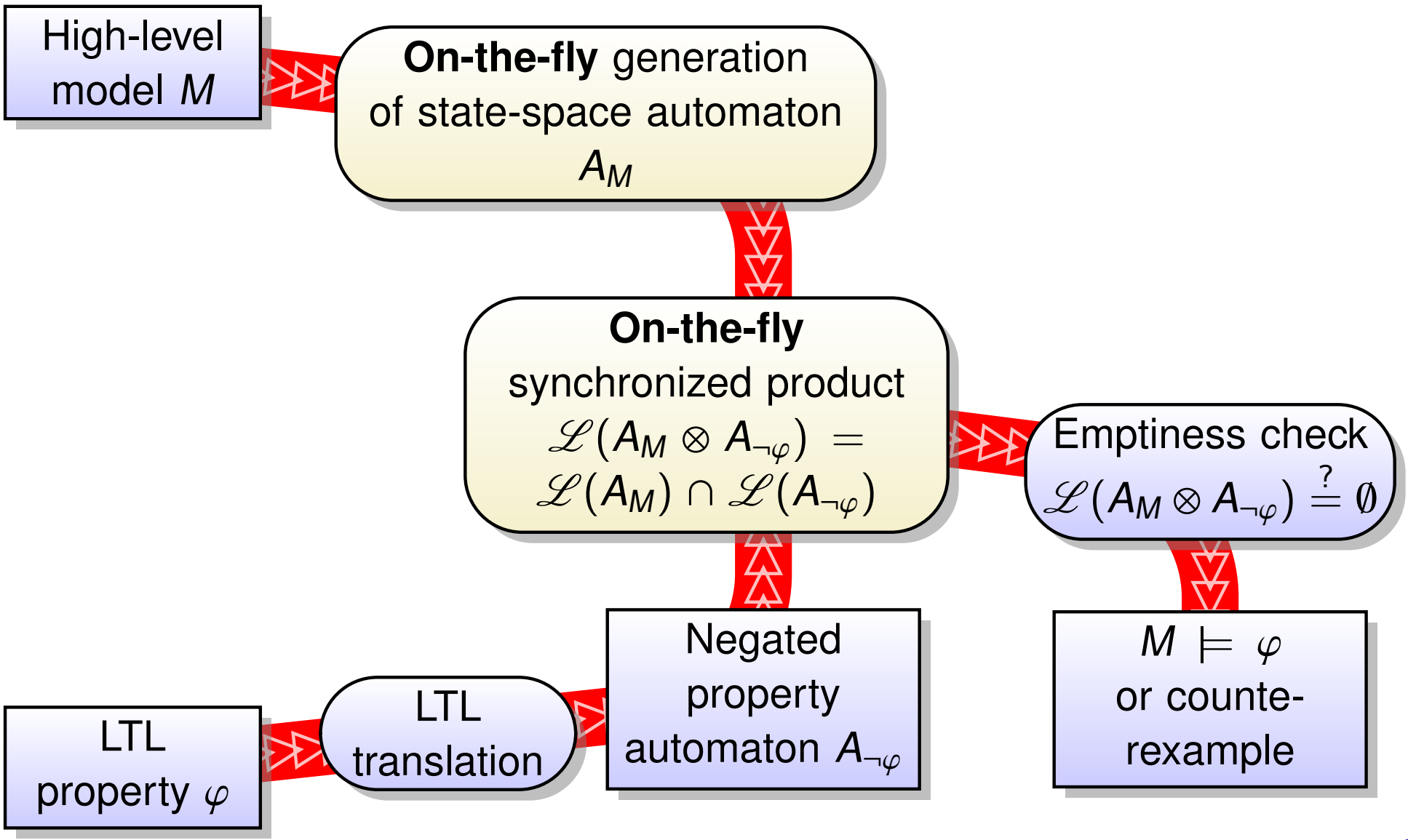
# Approche par automate du model checking



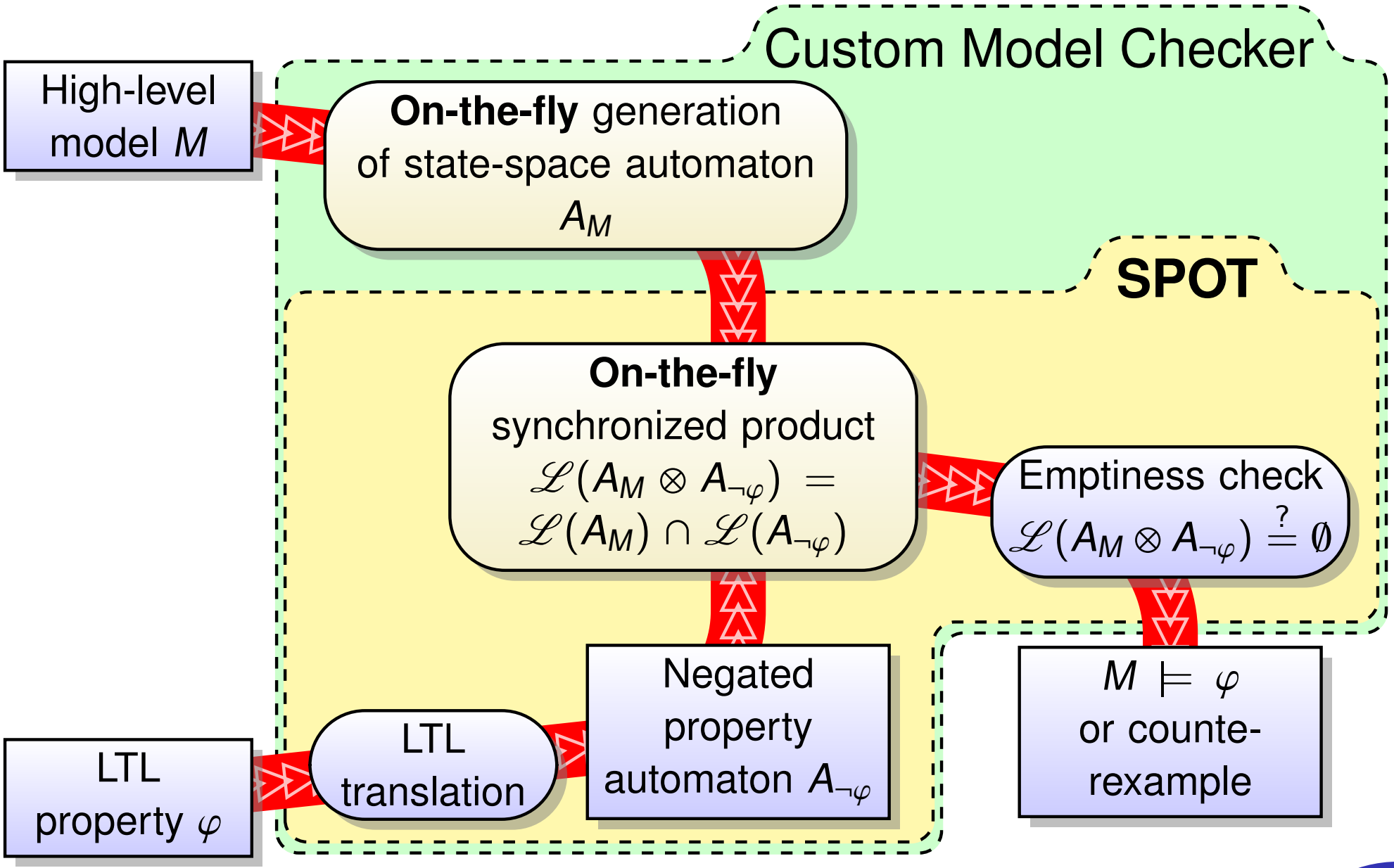
# Approche par automate du model checking



# Approche par automate du model checking



# Approche par automate du model checking



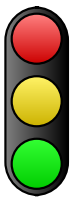
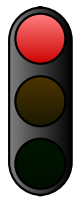
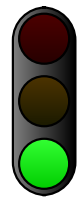
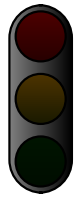
# Logique des propositions : l'instant présent

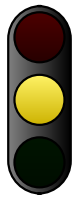
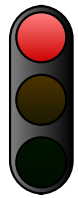
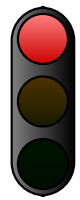
La logique propositionnelle peut caractériser un instant.

$r$ : feu rouge allumé

$o$ : feu orange allumé

$v$ : feu vert allumé

$r \wedge o \wedge v =$  , $r \wedge \neg o \wedge \neg v =$  , $\neg r \wedge \neg o \wedge v =$  ,
$\neg r \wedge \neg o \wedge \neg v =$  .

Comment dire que  précède  ?
Comment dire que le système ne reste pas toujours sur  ?

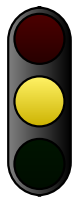
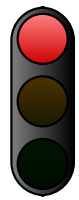
$\Rightarrow$ besoin de faire apparaître le temps

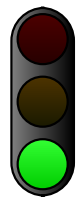
# F1S : Logique monadique du 1er ordre à un succ.

Les prop. deviennent des prédicats unaires, paramétrés par le temps.

$r(t)$, $o(t)$, $v(t)$ : feux allumés à l'instant $t$
$t+1$ : instant successeur immédiat
$t \leq u$ : ordre total sur les instants
$\exists t$, $\forall t$ : quantificateurs du premier ordre

$\neg\forall t.(r(t) \wedge \neg o(t) \wedge \neg v(t))$ : le système ne reste pas toujours  .

$\forall t.((\neg r(t) \wedge o(t) \wedge \neg v(t)) \rightarrow (r(t+1) \wedge \neg o(t+1) \wedge \neg v(t+1)))$ :
toute configuration  est immédiatement suivie de  .

$\forall t.\exists u.(t \leq u) \wedge (\neg r(u) \wedge \neg o(u) \wedge v(u))$ :
le système passe infiniment souvent par la configuration  .

# S1S : Logique monadique du $2^{nd}$ ordre à un succ.

$r(t)$, $o(t)$, $v(t)$ : feux allumés à l'instant $t$
$0$ : instant initial
$t + 1$ : instant successeur immédiat
$t \leq u$ : ordre total sur les instants
$\exists t$, $\forall t$ : quantificateurs du premier ordre
$\exists^2 X$, $\forall^2 X$ : quantificateurs du second ordre
$t \in X$ : appartenance d'une variable du premier ordre a une variable du second

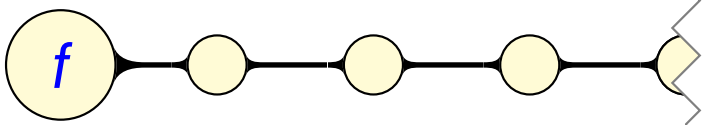
$$\exists^2 X. \underbrace{(0 \in X \wedge (\forall t.(t \in X \rightarrow (\neg(t+1 \in X) \wedge (t+1+1 \in X)))))}_{Pair(X)}$$

$\exists^2 X.Pair(X) \wedge \forall t.(t \in X \rightarrow r(t))$ : le feu rouge doit toujours être allumé aux instants pairs.

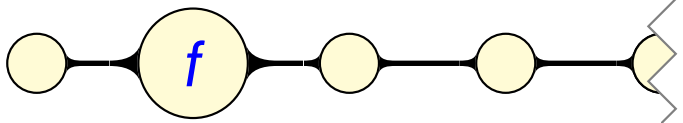
# LTL : Logique Temporelle à temps Linéaire

Pour $f$ et $g$ deux formules propositionelles :

Present $f$

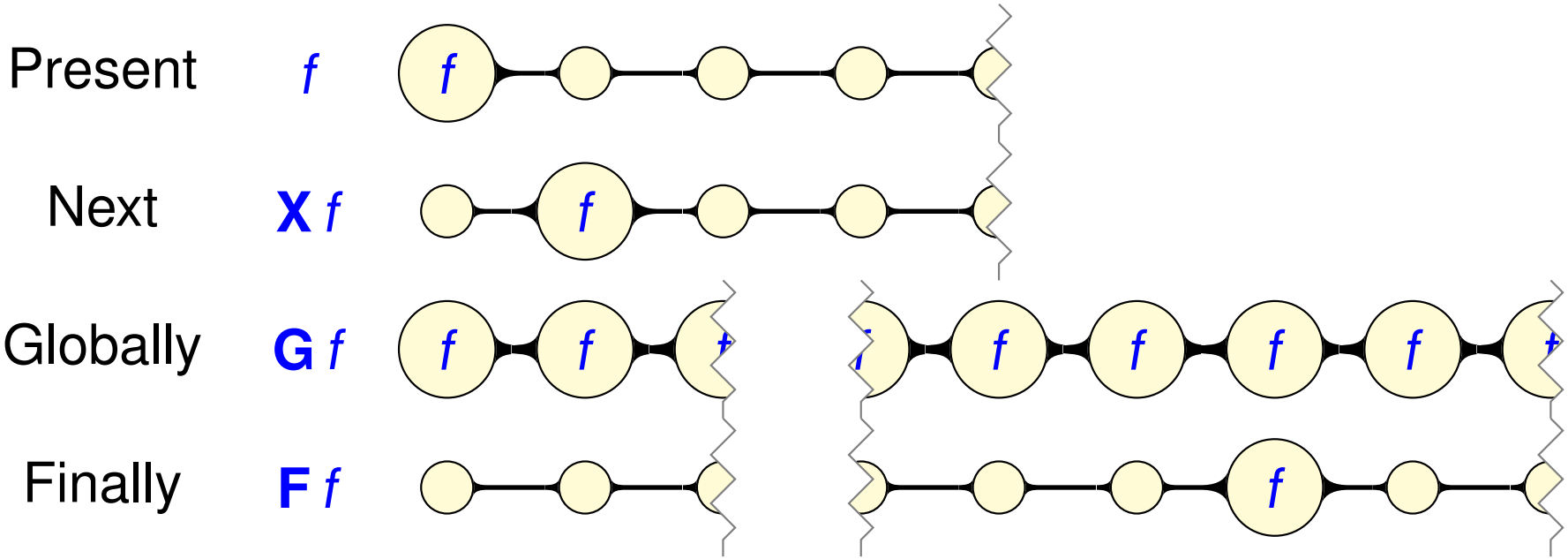



Next $\mathbf{X}\, f$



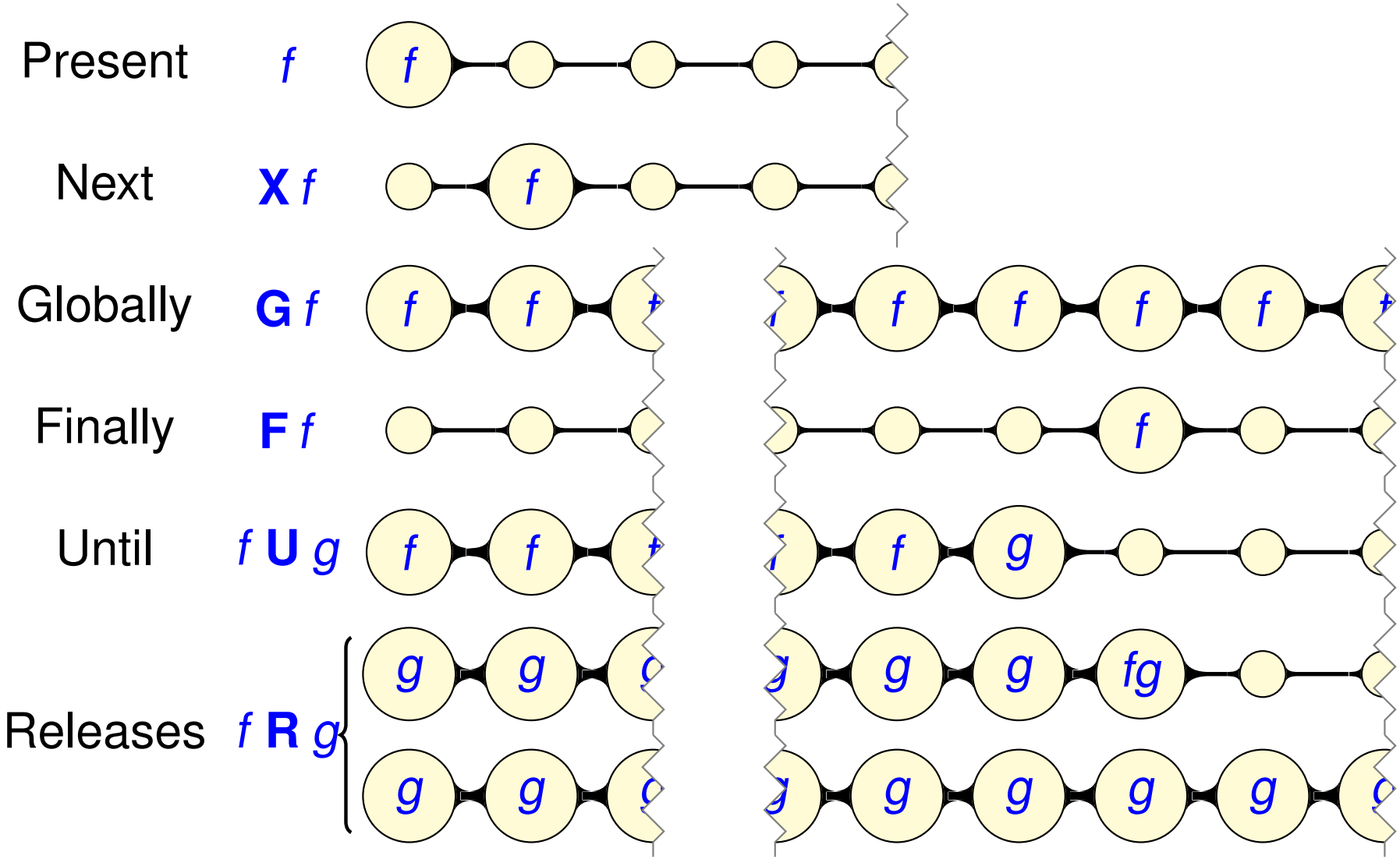
# LTL : Logique Temporelle à temps Linéaire

Pour $f$ et $g$ deux formules propositionelles :



# LTL : Logique Temporelle à temps Linéaire

Pour $f$ et $g$ deux formules propositionelles :

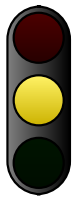


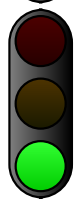
# LTL : Logique Temporelle à temps Linéaire

| | | |
|---|---|---|
| Next | $\mathbf{X}\, f$ | $f$ est vraie à l'instant suivant |
| Always | $\mathbf{G}\, f$ | $f$ est vraie a tout instant |
| Eventually | $\mathbf{F}\, f$ | $f$ sera vraie à un instant (présent ou futur) |
| Until | $f\, \mathbf{U}\, g$ | $f$ est toujours vraie jusqu'à ce que $g$ le soit |

Équivalente à la logique monadique du premier ordre à un successeur.

$\neg\, \mathbf{G}(r \wedge \neg o \wedge \neg v)$ : le système ne reste pas tout le temps  .

$\mathbf{G}((\neg r \wedge o \wedge \neg v) \rightarrow \mathbf{X}(r \wedge \neg o \wedge \neg v))$ :  est tjs imm. suivi de  .

$\mathbf{G}\, \mathbf{F}(\neg r \wedge \neg o \wedge v)$ : le système passe infiniment souvent par  .

# LTL : Logique Temporelle à temps Linéaire

| | | |
|---|---|---|
| Next | $\mathbf{X}\, f$ | $f$ est vraie à l'instant suivant |
| Always | $\mathbf{G}\, f$ | $f$ est vraie a tout instant |
| Eventually | $\mathbf{F}\, f$ | $f$ sera vraie à un instant (présent ou futur) |
| Until | $f\, \mathbf{U}\, g$ | $f$ est toujours vraie jusqu'à ce que $g$ le soit |

**F**, **G** et **R** (Release) peuvent être vus comme du sucre :

$$\mathbf{F}\, f = \top\, \mathbf{U}\, f$$

$$f\, \mathbf{R}\, g = \neg(\neg f\, \mathbf{U}\, \neg g)$$

$$\mathbf{G}\, f = \neg\, \mathbf{F}\, \neg f = \neg(\top\, \mathbf{U}\, \neg f) = \bot\, \mathbf{R}\, f$$

D'autre part on a :

$$\neg\, \mathbf{X}\, f = \mathbf{X}\, \neg f$$

$$\neg\, \mathbf{F}\, f = \mathbf{G}\, \neg f \qquad \neg(f\, \mathbf{U}\, g) = (\neg f)\, \mathbf{R}\, (\neg g)$$

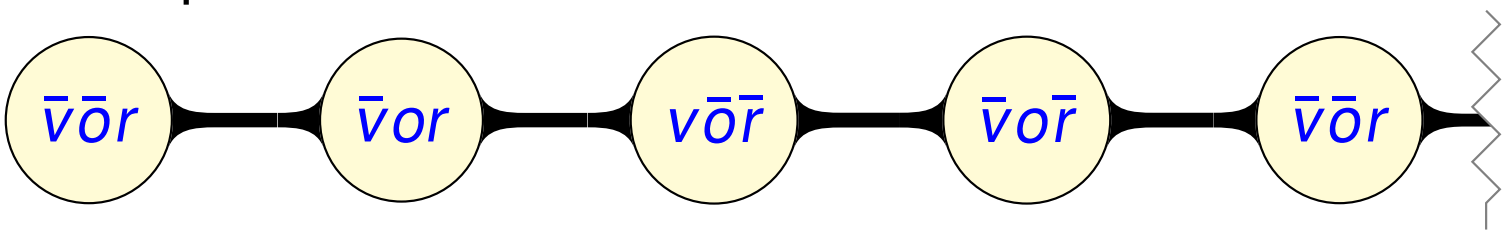
$$\neg\, \mathbf{G}\, f = \mathbf{F}\, \neg f \qquad \neg(f\, \mathbf{R}\, g) = (\neg f)\, \mathbf{U}\, (\neg g)$$

# Vers une définition formelle de LTL

- Une formule LTL décrit une contrainte sur les scénarios du système.
  Comment définir un scénario ?

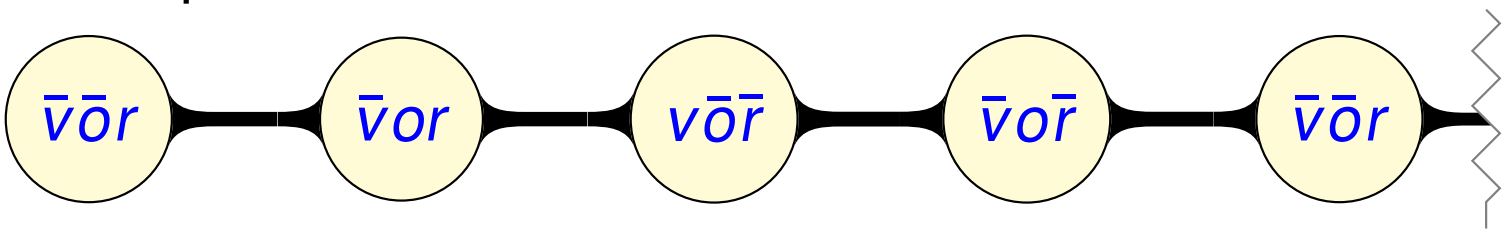
# Vers une définition formelle de LTL

- Une formule LTL décrit une contrainte sur les scénarios du système.
  Comment définir un scénario ?
- Un scénario est une séquence infinie dont chaque étape est étiquetée par les valuations de toutes les propositions atomiques.



# Vers une définition formelle de LTL

- Une formule LTL décrit une contrainte sur les scénarios du système.
  Comment définir un scénario ?
- Un scénario est une séquence infinie dont chaque étape est étiquetée par les valuations de toutes les propositions atomiques.




- On voir un scénatio comme un $\omega$-mot dont les lettres sont les sous-ensembles des propositions atomiques. La lettre (i.e., le sous-ensemble) donne les propositions vraies à cet instant.

$$\{r\}; \{o, r\}; \{v\}; \{o\}; \{r\}; \ldots$$

# $\omega$ : premier ordinal infini

Les entiers naturels peuvent être construits avec des ensembles :

$$
\begin{aligned}
0 &= \{\} \\
1 &= \{0\} = \{\{\}\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tout entier correspond à un ensemble.
L'inclusion sur les ensembles se traduit par un ordre sur les entiers.

# $\omega$ : premier ordinal infini

Les entiers naturels peuvent être construits avec des ensembles :

$$
\begin{aligned}
0 &= \{\} \\
1 &= \{0\} = \{\{\}\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} \\
&\vdots \\
n + 1 &= n \cup \{n\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tout entier correspond à un ensemble.
L'inclusion sur les ensembles se traduit par un ordre sur les entiers.

# $\omega$ : premier ordinal infini

Les entiers naturels peuvent être construits avec des ensembles :

$$
\begin{aligned}
0 &= \{\} \\
1 &= \{0\} = \{\{\}\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} \\
&\vdots \\
n + 1 &= n \cup \{n\} \\
&\vdots \\
&= \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Tout entier correspond à un ensemble.
L'inclusion sur les ensembles se traduit par un ordre sur les entiers.

# $\omega$ : premier ordinal infini

Les entiers naturels peuvent être construits avec des ensembles :

$$
\begin{aligned}
0 &= \{\} \\
1 &= \{0\} = \{\{\}\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} \\
&\vdots \\
n + 1 &= n \cup \{n\} \\
&\vdots \\
\omega &= \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Tout entier correspond à un ensemble.
L'inclusion sur les ensembles se traduit par un ordre sur les entiers.

# $\omega$ : premier ordinal infini

Les ordinaux peuvent être construits avec des ensembles :

$$
\begin{aligned}
0 &= \{\} \\
1 &= \{0\} = \{\{\}\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} \\
&\vdots \\
n + 1 &= n \cup \{n\} \\
&\vdots \\
\omega &= \mathbb{N} \\
\omega + 1 &= \mathbb{N} \cup \{\omega\}
\end{aligned}
$$

Tout ordinal correspond à un ensemble.
L'inclusion sur les ensembles se traduit par un ordre sur les ordinaux.
(Paradoxe : les ordinaux ne forment pas un ensemble.)

# Notations sur les $\omega$-mots

Soient $\Sigma$ un alphabet et $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ un ordinal.

Dans notre cas, l'alphabet est $\Sigma = 2^{AP}$ où $AP = \{v, o, g\}$

Une séquence de taille $n$ (ou $n$-mot) de $\Sigma$ est une fonction $\sigma : [\![0, n[\![ \mapsto \Sigma$ associant une lettre chaque entier naturel inférieur à $n$.

Notations :

- $\Sigma^n$ l'ensemble des séquences de taille $n$,
- $\Sigma^\star$ l'ensemble des séquences finies ($n < \omega$),
- $\Sigma^\omega$ l'ensemble des séquences infinies ($n = \omega$),
- $\sigma^i$ suffixe de $\sigma$ commençant à la position $i$ : $\sigma^i(j) = \sigma(i + j)$ pour les $j$ tels que $i + j < n$,

# LTL : Interprétation sur un $\omega$-mot

Pour toute proposition atomique $p_i$ et toutes formules LTL $f_1$ et $f_2$, la satisfaction d'une formule LTL $f$ par rapport à un mot $\sigma \in (2^{AP})^\omega$ est notée $\sigma \models f$ et définie inductivement par :

$$
\begin{array}{ll}
\sigma \models p & \text{ssi } p \in \sigma(0) \\
\sigma \models \neg f_1 & \text{ssi } \neg(\sigma \models f_1) \\
\sigma \models f_1 \wedge f_2 & \text{ssi } \sigma \models f_1 \text{ et } \sigma \models f_2 \\
\sigma \models \mathbf{X}\, f_1 & \text{ssi } \sigma^1 \models f_1 \\
\sigma \models f_1 \,\mathbf{U}\, f_2 & \text{ssi } \exists i \geq 0 \text{ tel que } \sigma^i \models f_2 \text{ et } \forall j \in [\![0, i-1]\!],\ \sigma^j \models f_1
\end{array}
$$

Le langage de la formule $\varphi$ est l'ensemble des séquences infinies sur $2^{AP}$ qui satisfont $\varphi$.

$$\mathscr{L}_{AP}(\varphi) = \left\{ \sigma \in (2^{AP})^\omega \,\middle|\, \sigma \models \varphi \right\}$$

# $\omega$-automates

"Presque comme"(TM) les automates vus en THLR. Mais :

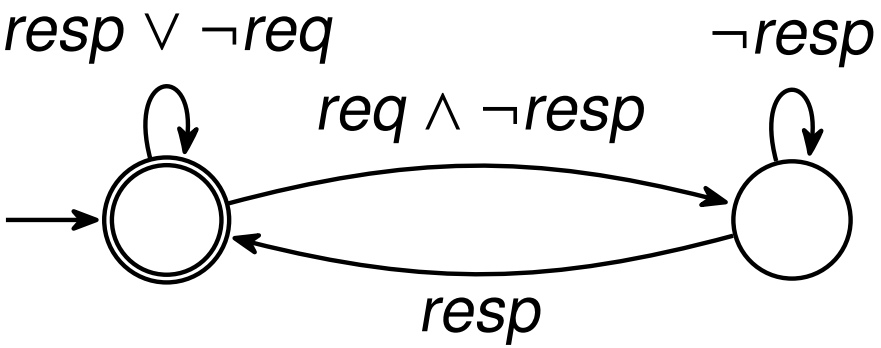
- reconnaissaient des mots infinis : la notion d'état final n'a plus de sens et est remplacée par une condition d'acceptation.
- (dans notre cas) les lettres sont tirées de $2^{AP}$, et souvent représentés par des formules booléenes sur $AP$

Différentes conditions d'acceptation existent, et porte des noms différents. (Automate de Büchi, de Rabin, de Streett, de Müller, automates à parité, etc.)

# Automates de Büchi

Un mot est *accepté* par l'automate s'il visite **infiniment souvent** au moins un état acceptant
Notation traditionnelle :

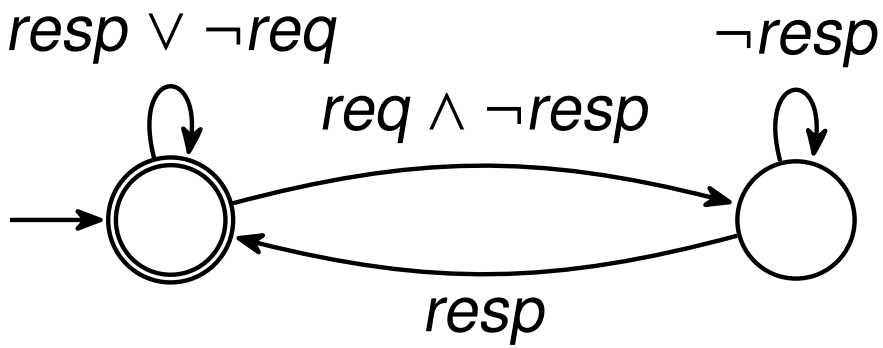
$\mathbf{G}(req \rightarrow \mathbf{F}\, resp)$



# Automates de Büchi

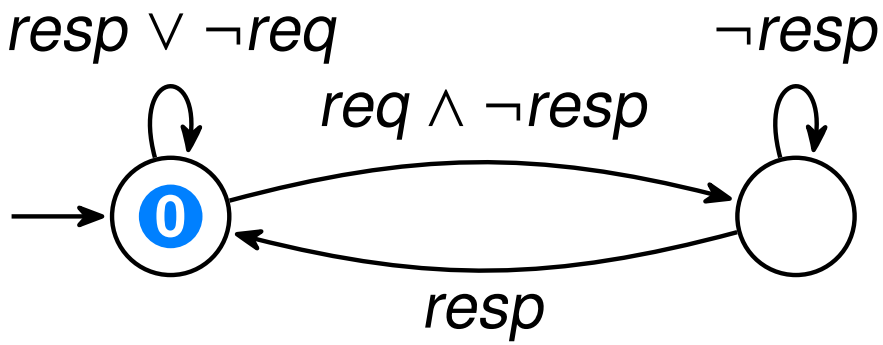
Un mot est *accepté* par l'automate s'il visite **infiniment souvent** au moins un état acceptant
Notation traditionnelle :

$\mathbf{G}(req \rightarrow \mathbf{F}\, resp)$




Notation plus pratique pour la suite :

$\mathbf{G}(req \rightarrow \mathbf{F}\, resp)$

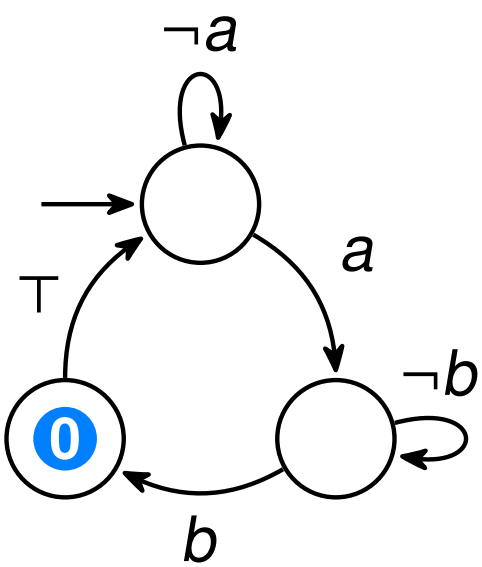



Inf(0)

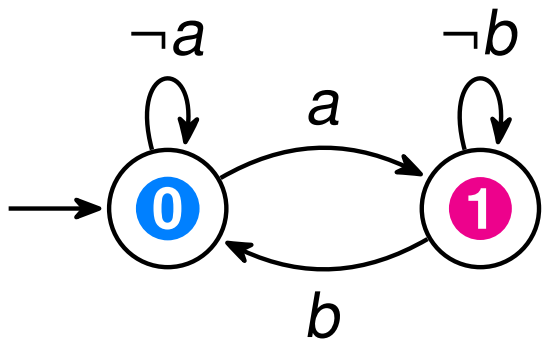
# Automates de Büchi généralisés

Un mot est *accepté* par l'automate s'il visite **infiniment souvent** chaque ensemble d'acceptation. Les ensembles d'acceptation sont des ensembles d'états ou de transitions.

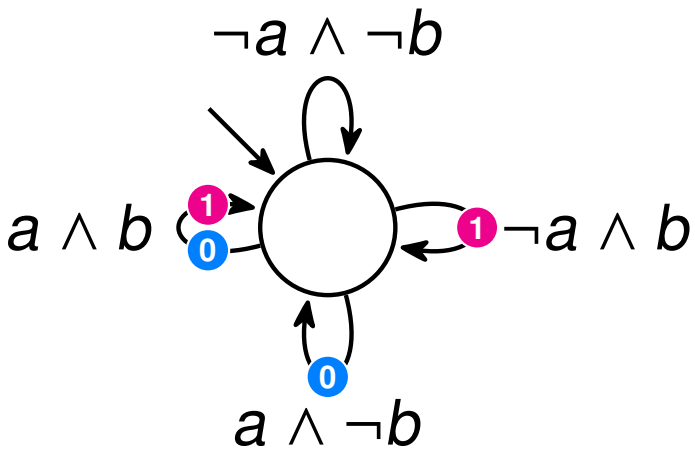
$$\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,a \wedge \mathbf{G}\,\mathbf{F}\,b$$




Inf(0)




Inf(0) ∧ Inf(1)




Inf(0) ∧ Inf(1)