Corrigé

Examen de Théorie des Graphes

EPITA ING1 2012 S2; A. DURET-LUTZ

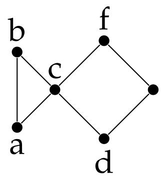
Durée : 1 heure 30

1er avril 2010

Consignes

– Cet examen se déroule **sans document** et **sans calculatrice**.
Vous pouvez toutefois vous servir d'un écailleur à condition de ne pas déranger vos voisins.
– Répondez sur le sujet dans les cadres prévus à cet effet.
– Il y a 6 pages d'énoncé. **Rappelez votre nom en haut de chaque feuille** au cas où elles se mélangeraient.
– Ne donnez pas trop de détails. Lorsqu'on vous demande des algorithmes, on se moque des points-virgules de fin de commande etc. Écrivez simplement et lisiblement. Des spécifications claires et implémentables sont préférées à du code C ou C++ verbeux.
– Le barème est indicatif et correspond à une note sur 23.

1 Graphe Poisson (4 points)

On considère le graphe suivant : 

. Précisez les caractéristiques de ce graphe :

1. **(0,5pt)** Diamètre

Réponse :
3

2. **(0,5pt)** Rayon

Réponse :
2

3. **(0,5pt)** État(s) du centre

Réponse :
$\{c, d, f\}$

4. **(0,5pt)** Maille

Réponse :
3

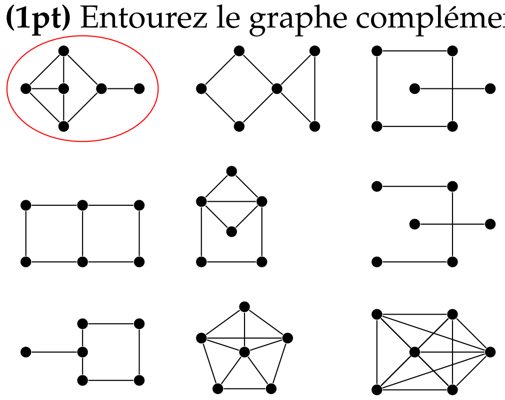
5. **(0,5pt)** Nombre chromatique

Réponse :
3

6. **(0,5pt)** Taille de la plus grande clique

Réponse :
3

7. **(1pt)** Entourez le graphe complémentaire



2 Sans queue ni tête (6 points)

Ordralfabetix, poissonier avrilopisciophile [1] bien connu, possède six différents types de poissons : des Alphas, des Bétas, des Certa, des Epsalas et des Fetas. Malheureusement certains poissons ne peuvent pas être mis dans le même aquarium, soit parce qu'ils s'attaqueraient, soit parce qu'ils ont besoin de conditions (eau, température...) différentes. [2]

Le tableau suivant résume les incompatibilités entre ces types de poissons (désignés par leurs initiales) :

Le poisson	A	B	C	D	E	F
Ne peut pas être avec	B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

1. **(0.5 pts)** Quel est le nombre minimum d'aquariums nécessaires pour faire vivre tous ces poissons ?

Réponse :

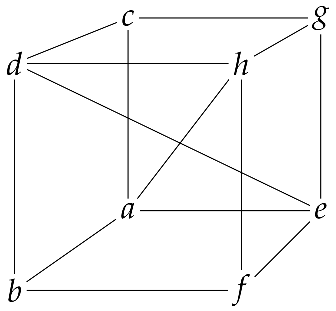
3 (voir question suivante).

2. **(1 pts)** À quel problème de théorie des graphes correspond la question précédente ? (On ne vous demande **pas** de dessiner le graphe correspondant.)

Réponse :

On cherche le nombre de couleurs minimal (le nombre chromatique) du graphe représentant la relation d'incompatibilité entre les poissons.
La réponse pouvait aussi être exprimée avec le graphe complémentaire, c'est-à-dire le graphe des compatibilités. Dans ce cas on cherche des cliques maximales.
Dans tous les cas, il est faux d'essayer de rapprocher ce problème des graphes d'intervalles (à quoi correspondraient ces intervalles dans le problème ?). Le graphe construit n'est même pas cordal.

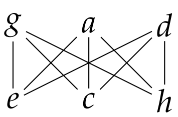
3. **(1 pt)** Ordralfabetix expédie son poisson aux 8 coins de l'univers (qui est cubique). Le Général Jack O'Neill se charge des livraisons grâce à un système de portails permettant de voyager rapidement entre deux points de l'univers. La carte des connexions entre ces portails est donnée ainsi :

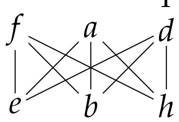


ou sous forme de matrice d'adjacence $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Comme il est assez difficile de se représenter ce graphe en trois dimensions, ou de lire la matrice, O'Neill aimerait une représentation planaire. Justifiez, en utilisant soit un critère de planarité vu en cours, soit le théorème de Kuratowski, que ce graphe n'est *pas* planaire.

Réponse :

Ce graphe possède 8 sommets et 14 arêtes. Comme il ne possède aucun triangle, il devrait vérifier $14 = |E| \leq 2|V| - 4 = 12$, ce qui n'est pas le cas.
Une autre démonstration consiste à dire que ce graphe ne peut être planaire puisqu'il contient 

ou encore 

c'est-à-dire une instance de $K_{3,3}$, qui ne peut pas être planaire d'après de théorème de Kuratowski.

1. Collectionneur de poissons d'avril (merci Julien).
2. Par exemple le Feta ne peut nager que dans l'huile.

4. **(0.5 pt)** Une fois par an, on demande à O'Neill de tester les portails en empruntant toutes les connexions possibles. Justifiez que ce graphe ne possède pas de chemin eulérien, c'est-à-dire qu'O'Neill ne peut pas visiter toutes les arêtes en n'empruntant qu'une fois chacune.

Réponse :

Un graphe connexe possède un chemin eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2. Or ici il y a 4 sommets de degré impair : b, c, f et g.

5. **(1.5 pts)** Pour livrer le poisson plus vite, on demande à Thomas Anderson (alias *Néo*) de modifier la matrice pour installer de nouvelles connexions entre les portails. On souhaite maintenant relier tous les portails qui étaient connectés par un chemin de deux connexions.

   Par exemple il était possible de passer de a à g en chaînant deux connexions, le nouveau graphe doit donc posséder une arête entre a et g en plus de celles qui existaient auparavant. À l'inverse, il n'est pas possible de relier c à f avec une ou deux connexions, le nouveau graphe ne devra donc pas posséder d'arête entre c et f.

   Quelles opérations matricielles permettent de définir la nouvelle matrice M' à partir de M ? Vous pouvez interpréter les éléments de M dans le semi-anneau des booléens $(\mathbb{B}, \vee, \wedge, 0, 1)$ et utiliser les opérations matricielles qui en découlent.

   Note : on ne vous demande pas de calculer M', juste de donner une formule qui lie M' à M.

Réponse :

M^2 représente tous les paires de sommets accessibles par deux arêtes. On a donc $M' = M + M^2$.
Dans cette formule, l'addition et le produit matriciel utilisent $\vee$ et $\wedge$ à la place des addition et multiplications scalaires (sinon on verrait des 2 entre deux sommets qui peuvent être connectés soit par une arête, soit par deux arêtes).

6. **(1.5 pts)** L'année suivante, on rappelle Néo pour lui faire à nouveau effectuer la même opération : ajouter des arêtes pour relier les sommets qui étaient connectés par deux arêtes dans le graphe associé à la matrice M'.

   Néo réalise alors que la matrice M'' nouvellement formée correspond à un graphe complet.

   De façon générale, sur un graphe connexe de diamètre D, combien de fois faudrait-il itérer cette opération sur la matrice d'adjacence pour obtenir un graphe complet ?

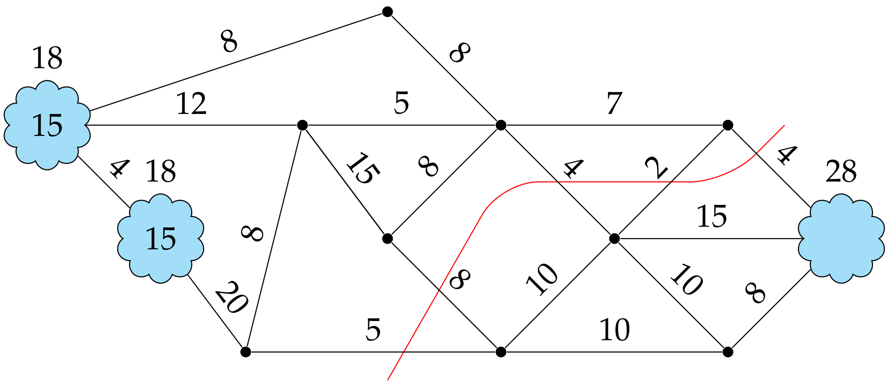
Réponse :

À l'itération 1, on a relié tous les sommets à une distance ≤ 2.
À l'itération 2, on a relié tous les sommets à une distance ≤ 4.
$\vdots$
À l'itération k, on a relié tous les sommets à une distance $\leq 2^k$.
Si le diamètre du graphe est D, on obtiendra une graphe complet après la plus petite itération k telle que $2^k \leq D$. Autrement dit, $k = \lceil \log_2 D \rceil$.

3 Un poisson nommé Warda (5 points)

Warda et ses 29 amis poissons habitent les deux lacs de gauche (15 poissons par lac) et souhaitent se rendre à l'anniversaire de Némo dans le lac de droite. Les trois lacs sont reliés par un réseau de canalisations sous haute pression (de sorte qu'on considère que tous les déplacements sont instantanés) représenté ci-dessous. Les valeurs indiquées sur les arêtes représentent la capacité maximale de la canalisation en nombre de poissons. Les deux lacs de gauche ne peuvent contenir plus de 18 poissons chacun, et le lac de droite ne peut recevoir plus de 28 poissons. [3]

3. Ce sont plus des flaques que des lacs.



1. **(0.5pt)** Les arêtes de ce graphe ne sont pas orientées car les poissons peuvent circuler dans les deux sens. Comment faut-il adapter les algorithmes du cours sur les flots, qui étaient présentés sur des graphes orientés ?

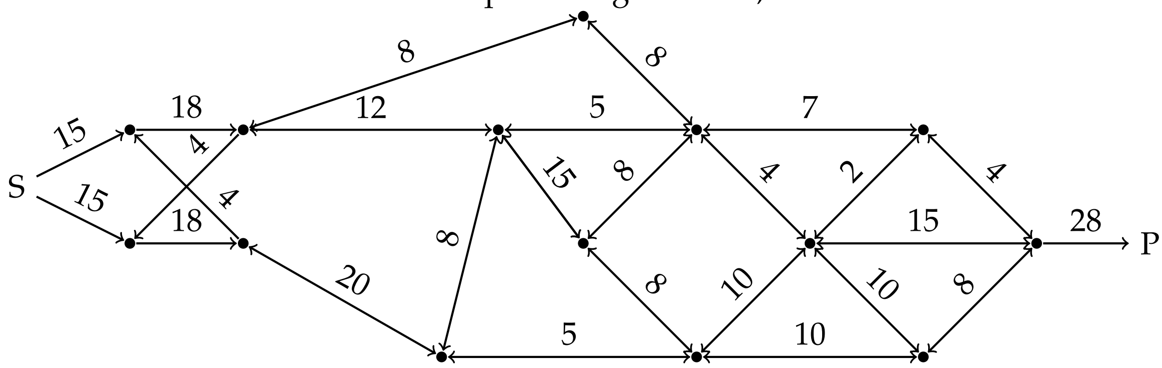
Réponse :

On considère simplement qu'une arête vaut deux arcs orientés : un dans chaque sens, avec la même capacité.

2. **(1.5 pt)** Comment transformer les contraintes des lacs (nombre de poissons initiaux, et les capacités maximales) de façon à se ramener à un problème de flot maximal dans un réseau de transport entre une source et un puits ?

Réponse :

Quand on a une contrainte de capacité sur un sommet, on peut découper ce sommet en deux, et relier les deux sommets obtenus par un arc qui prend la contrainte.
Pour obtenir une seule source, on va créer une super-source qui sera connectée aux deux lacs de gauche, et on utilisera les capacités initiales de ces deux lacs au lieu de ∞ pour relier les super-sources aux lacs.
Un schéma valant souvent mieux qu'un long discours, on obtient :



3. **(2 pt)** Quelle est la valeur du flot maximal de ce réseau de transport ? (Ne déroulez pas l'algorithme sur la copie, merci.)

Réponse :

23

4. **(1 pt)** Donnez une coupe minimale correspondante. (Vous pouvez la dessiner sur le graphe de l'énoncé)

Réponse :

Cf. la figure.

4 Poisson avec arêtes (8 points)

Un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle qui passe par tous ses sommets exactement une fois. De façon générale, déterminer si un graphe est hamiltonien est un problème NP-complet. Il existe cependant des conditions suffisantes. Voici la plus générale connue à ce jour :

Théorème de Chvátal. *Soit $G = (V, E)$ un graphe de n sommets notés $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et ordonnés par degrés croissants. C'est-à-dire que $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n)$.*
Si pour tout $k < n/2$ on a $\deg(v_k) \leq k \implies \deg(v_{n-k}) \geq n - k$ alors G est hamiltonien.

1. **(2.5 pts)** Donnez la complexité (en fonction de $|E|$ et $|V|$) d'un algorithme qui vérifie si un graphe vérifie la condition de Chvátal. N'écrivez pas l'algorithme en détail, mais décrivez ses principales étapes pour justifier la complexité que vous annoncez.
   Vous supposerez que le graphe est représenté sous forme de liste d'adjacence.

Réponse :

(a) Parcourir le graphe pour compter le degré de chaque nœud, et stocker chaque degré dans un tableau : $\Theta(|V| + |E|)$ opérations. (Si un liste sait donner sa taille, la complexité tombe à $\Theta(|V|)$.)

(b) Trier le tableau. Les degrés étant compris entre 0 et $|V|$ on peut se permettre un tri par dénombrement en $\Theta(|V|)$ opérations.

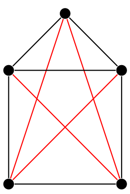
(c) Parcourir le tableau pour vérifier que $\deg(v_k) \leq k \implies \deg(v_{n-k}) \geq n - k$: $\mathrm{O}(|V|)$ opérations (on peut s'arrêter dès que la condition n'est pas vérifiée).

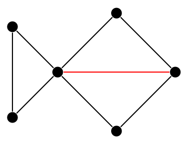
L'algorithme tourne donc en $\Theta(|E| + |V|)$.

Une autre condition est basée sur la notion de fermeture de graphe. À partir d'un graphe $G_0 = (V, E_0)$ on construit une suite de graphes $G_1, G_2, \ldots, G_m$ tels que chaque G_i a été construit à partir du précédent en ajoutant une arête reliant deux sommets dont la somme des degrés soit au moins $|V|$. Formellement, si l'on note $\deg_{G_i}(x)$ le degré de x dans G_i, on cherche une arête $(u, v) \notin E_i$ absente de G_i et telle que $\deg_{G_i}(u) + \deg_{G_i}(v) \geq |V|$ puis on ajoute cette arête pour former G_{i+1} en posant $E_{i+1} = E \cup \{(u, v), (v, u)\}$. On répète cette construction tant que de telles arêtes existent, et on note G_m le dernier graphe obtenu. $G_m = F(G_0)$ est la *fermeture* de G_0. (On peut montrer que cette fermeture est unique, quelque soit le choix de l'ordre dans lequel les arêtes sont ajoutées.)

2. **(1 pt)** Calculez la fermeture des deux graphes suivants (complétez directement les figures).

Réponse :





3. **(2.5 pt)** Quelle est la complexité (en fonction de $|E|$ et $|V|$), d'un algorithme qui calcule la fermeture d'un graphe G ? Vous supposerez à nouveau recevoir (et rendre) la représentation du graphe sous forme de liste d'ajacence, et indiquerez les principales étapes de votre algorithme de façon à pouvoir en justifier le coût sans rentrer dans les détails.

Réponse :

(a) Construire la matrice d'ajacence ainsi qu'un tableau de degrés de chaque nœuds : $\Theta(|V|^2)$

(b) Parcourir la matrice à la recherche d'une case nulle de coordonnées (u, v) telle que $\deg[u] + \deg[v] \geq |V|$, puis ajouter cet arc à la matrice et mettre à jour les degrés : $O(|V|^2)$.

(c) Répéter le point précédent tant que cela est possible, au plus $O(|V|^2)$ fois

(d) Convertir la matrice sous forme de liste d'adjacence : $O(|V|^2)$.

L'algorithme tourne donc en $O(|V|^4)$.

Théorème de Bondy-Chvátal. *Un graphe G est hamiltonien si et seulement si sa fermeture $F(G)$ est un graphe hamiltonien.*

Comme un graphe complet est hamiltonien, on en déduit une autre condition suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien : il suffit que sa fermeture soit un graphe complet.

4. **(0.5 pt)** Justifiez le fait que ce n'est qu'une condition suffisante en donnant un exemple de petit graphe hamiltonien dont la fermeture n'est pas complète (pas plus de six sommets).

Réponse :

C_5 ou C_6 (les cycles de 5 ou 6 sommets) sont hamiltonien, mais comme tous leur sommets sont de degré 2 la fermeture ne les change pas.
Plusieurs personnes ont donné le graphe poisson comme exemple. C'est une mauvaise réponse : certes la fermeture du graphe poisson n'est pas complète, mais le graphe poisson n'est pas hamiltonien !

5. **(1.5 pts)** Quelle est la complexité d'un algorithme qui vérifie si un graphe est complet ? Supposez à nouveau le graphe sous forme de liste d'adjacence.

Réponse :

$O(|E| + |V|)$: Il faut compter les arcs sortants de chaque sommet : on s'arrête dès que l'un des degrés est différent de $|V|$.

FIN

(Salut, et encore merci pour le poisson.)