Nom :

Prénom :

Examen de Théorie des Graphes

EPITA ING1 2013 S2; A. DURET-LUTZ

Durée : 1 heure 30

28 mars 2010

Consignes

- Cet examen se déroule **sans document** et **sans calculatrice**.
- Répondez sur le sujet dans les cadres prévus à cet effet.
- Il y a 6 pages d'énoncé. **Rappelez votre nom en haut de chaque feuille** au cas où elles se mélangeraient.
- Ne donnez pas trop de détails. Lorsqu'on vous demande des algorithmes, on se moque des points-virgules de fin de commande etc. Écrivez simplement et lisiblement. Des spécifications claires et implémentables sont préférées à du code C ou C++ verbeux.
- Pour fêter l'anniversaire de Lady Gaga, le barème (indicatif) correspond à une note sur 25.

1 Complexités diverses (8 points)

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, non-orienté, et non vide. Supposez que ce graphe vous est fourni sous forme de matrice ou de liste d'adjacence (à votre convenance). Lorsqu'on vous demande la complexité d'un algorithme, exprimez-la en fonction de $|V|$ et $|E|$, en utilisant la notation asymptotique (Θ, O, ou Ω) la plus précise.

1. **(4 pts)** Décrivez un algorithme permettant de calculer à la fois le rayon et le diamètre de G. Quelle est sa complexité ?

Réponse :

2. On considère l'algorithme suivant dans lequel les sommets V sont numérotés de 1 à $|V|$.

```
AlgoSansNom(G = (V, E))
    ∀v ∈ V, P[v] ← 0
    v0 ← any vertex of V
    todo.push_back(v0)
    P[v0] ← v0
    while (todo ≠ ∅)
        v ← todo.pop_front()
        for x ∈ NeighboursOf(v) do
            if x ≠ P[v] then
                if P[x] ≠ 0 then
                    return false
                else
                    todo.push_back(x)
                    P[x] ← v
    return true
```

(2 pts) Que calcule cet algorithme ? (Inutile de vous justifier.)

Réponse :

3. **(2 pts)** Quelle est la complexité d'AlgoSansNom ? Justifiez-votre réponse, éventuellement en annotant l'algorithme.

Réponse :

2 Jeu de billes pour apprendre les carrés (5 points)

Voici un jeu pour deux joueurs, utilisant un sac de n billes.

Les joueurs retirent chacun leur tour un nombre de billes qui doit être un carré $(1, 4, 9, 16, 25...)$. Le joueur qui retire la dernière bille du sac a perdu.

Voici un exemple de partie commençant avec $n = 24$ billes :

1. le joueur 1 retire 9 billes, il en reste donc 15
2. le joueur 2 retire 4 billes, il en reste donc 11
3. le joueur 1 retire 1 bille, il en reste donc 10
4. le joueur 2 retire 4 billes, il en reste donc 6
5. le joueur 1 retire 4 billes, il en reste donc 2
6. le joueur 2 retire 1 bille, il en reste donc 1
7. le joueur 1 retire la dernière bille, il a donc perdu.

Voici une autre partie, avec autant de billes, où l'autre joueur gagne.

1. le joueur 1 retire 1 bille, il en reste donc 23
2. le joueur 2 retire 9 billes, il en reste donc 14
3. le joueur 1 retire 9 billes, il en reste donc 5
4. le joueur 2 retire 1 bille, il en reste donc 4
5. le joueur 1 retire 1 bille, il en reste donc 3
6. le joueur 2 retire 1 bille, il en reste donc 2
7. le joueur 1 retire 1 bille, il en reste donc 1
8. le joueur 2 retire la dernière bille, il a donc perdu.

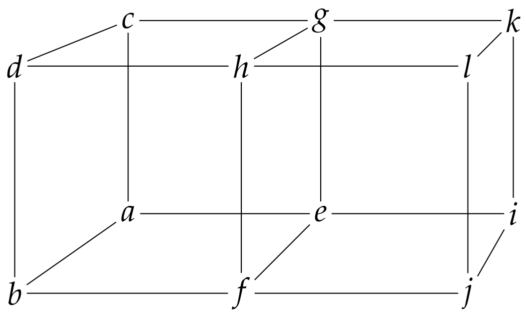
1. **(2 pts)** Justifiez que l'un des deux joueurs possède forcément une stratégie gagnante, quel que soit n. (On ne vous demande pas de dire pour quel joueur la stratégie existe.)

   Réponse :

2. **(3 pts)** Quel joueur possède une stratégie gagnante s'il y a $n = 13$ billes initialement ? **Justifiez votre réponse.**

   Réponse :

3 Planarité (2 points)



Le graphe ci-dessus est-il planaire ?
Justifiez votre réponse.

Réponse :

4 Circuits eulériens (10 points)

Nous avons vu en cours une condition pour qu'il existe un cycle eulérien dans un graphe **non-orienté**. Dans cet exercice nous transposons cette notion aux graphes **orientés**.

Voici quelque définitions pour un graphe orienté $G = (V, E)$:

chemin : Un chemin C de G est une succession d'arcs adjacents.
Autrement dit $C = ((s_1, d_1), (s_2, d_2), \ldots, (s_n, d_n))$ est un chemin si $(s_i, d_i) \in E$ pour $0 < i \leq n$, et $d_i = s_{i+1}$ pour $0 < i < n$.

circuit : Un circuit de G est un chemin tel que $d_n = s_1$.

circuit eulérien : Un circuit de G est eulérien s'il visite chaque arc du graphe exactement une fois.

graphe équilibré : G est équilibré si le degré entrant de chaque sommet est égal à son degré sortant.

graphe fortement connexe : G est fortement connexe si deux sommets quelconques sont forcément reliés par un chemin (qui respecte le sens des arcs)

graphe connexe : G est connexe si deux sommets quelconques sont reliés dans le graphe non-orienté construit à partir de G en ignorant le sens des arcs.

sommet isolé : Un sommet de G est isolé s'il n'a aucun arc entrant et aucun arc sortant.

1. **(2 pts)** Justifiez que si un graphe sans sommets isolés possède un circuit eulérien, alors ce graphe est équilibré et fortement connexe.

Réponse :

2. **(3 pts)** Soit G un graphe équilibré, et soit $C = ((s_1, d_1), (s_2, d_2), \ldots, (s_n, d_n))$ un **chemin** de G de longueur la plus grande possible, qui n'utilise pas deux fois le même arc.
   Justifiez que $d_n = s_1$, c'est-à-dire que ce chemin est forcément un circuit.

Réponse :

3. **(3 pts)** (Suite de la question précédente.) Soit G un graphe équilibré **sans sommet isolé**, et soit C un chemin de G le plus long possible qui n'utilise pas deux fois le même arc. Nous savons maintenant que C est un circuit.
   Justifiez que si C n'est pas eulérien, alors G n'est pas connexe.

Réponse :

4. **(2 pts)** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe sans sommet isolé possède un circuit eulérien.

Réponse :

FIN