Corrigé

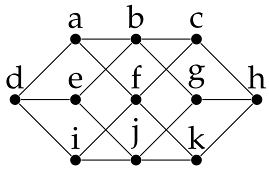
Examen de Théorie des Graphes

EPITA ING1 2014 S2; A. Duret-Lutz

Durée : 1 heure 30

— Document autorisé : une seule page A4 manuscrite (recto/verso).
— Cet examen se déroule **sans calculatrice, téléphone, ou autre appareil électroménager**.
— Répondez dans les cadres de façon claire et concise.
— Le barème, indicatif, correspond à une note sur 26,5.

1 Graphe de Herschel (5,5 points)

On considère le graphe suivant : 

. Précisez les caractéristiques de ce graphe :

1. **(0,5pt)** Rayon

Réponse : 3

2. **(1pt)** Diamètre

Réponse : 4

3. **(0,5pt)** État(s) du centre

Réponse : $a, b, c, e, f, g, i, j, k$ (c.-à-d. tous sauf d et h, dont l'excentricité est 4)

4. **(0,5pt)** Maille

Réponse : 4

5. **(0,5pt)** Nombre chromatique

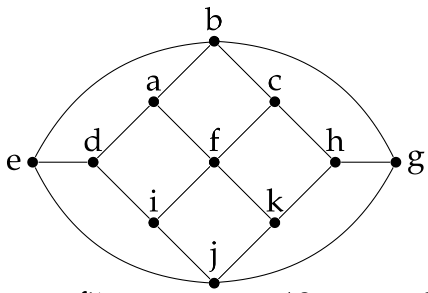
Réponse : 2

6. **(0,5pt)** Taille de la plus grande clique

Réponse : 2

7. **(2pt)** Ce graphe est-il planaire ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Oui, par exemple : 

Les réponses annonçant fièrement que $18 = e \leq 3n - 6 = 3 \times 11 - 6 = 27$ rapportent (tout aussi fièrement) 0, car j'ai insisté suffisamment souvent sur le fait que cette inégalité n'est qu'une *condition nécessaire* pour qu'un graphe soit planaire.

2 Graphes planaires (10 points)

Dans cet exercice on ne considère que des graphes simples, planaires, et non-orientés. Pour un tel graphe $G = (V, E)$, on note $n = |V|$ le nombre de sommets, $e = |E|/2$ le nombre d'arêtes, et f le nombre de faces. Le *degré moyen* d'un graphe est $\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg(v)$.

1. **(2pts)** Justifiez que $3f \leq 2e$.

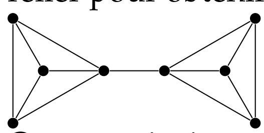
Réponse :

Si F est l'ensemble des faces, $\sum_{x \in F} \deg(x) = 2e$ car chaque arête appartient à deux face. D'autre part toute face x possède au minimum 3 arêtes, donc $\deg(x) \geq 3$ et $2e = \sum_{x \in F} \deg(x) \geq 3f$.

2. **(2pts)** Un graphe planaire connexe peut-il contenir deux cliques de taille 4 ? Justifiez-vous.

Réponse :

Sans aucun problème. Chaque 4-clique est un graphe planaire, et il n'est pas difficile de les relier pour obtenir un graphe connexe. Par exemple



On peut ainsi construire un graphe planaire avec autant de 4-clique que l'on souhaite.

3. **(2pts)** On considère le graphe $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $E = (\{1, 2\} \times \{3, 4, \ldots, n\}) \cup (\{3, 4, \ldots, n\} \times \{1, 2\})$. Vers quelle valeur tend le degré moyen lorsque n tend vers l'infini ?

Réponse :

Le sommets $\{1, 2\}$ sont de degré $n - 2$, et les sommets $\{3, 4, \ldots, n\}$ sont de degré 2. Cela nous donne un degré moyen de $\frac{2(n-2)+(n-2)2}{n} = 4 - 8/n$ qui tend vers 4 lorsque $n \to \infty$.

4. **(2pts)** Justifiez que le degré moyen d'un graphe planaire est strictement inférieur à 6.

Réponse :

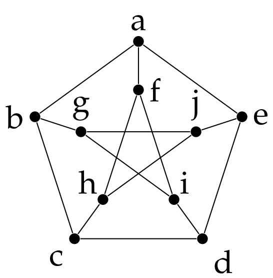
On sait que $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$. Et comme le graphe est planaire, il vérifie $e \leq 3n - 6$.
On en déduit que $\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg(v) \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$.

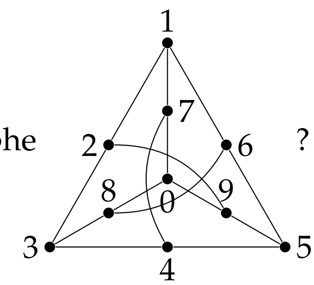
5. **(2pts)** Considérons un graphe planaire dans lequel tous les sommets v ont un degré $\deg(v) \geq 4$. Montrez que les *trois quarts* des sommets ont forcément un degré strictement inférieur à 7.

Réponse :

Preuve par l'absurde. Si trois quarts des sommets ont un degré ≥ 7, alors que le dernier quart n'a qu'un degré ≥ 4 alors le degré moyen est $\geq (3 \times 7 + 4)/4 = 25/4 > 6$ ce qui contredit le fait que le graphe est planaire d'après la question précédente.

3 Iso-morflons (2 points)

Le graphe 

est-il isomorphe au graphe 

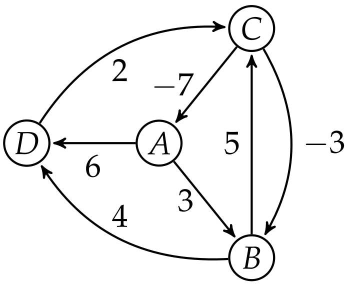
?

Réponse :

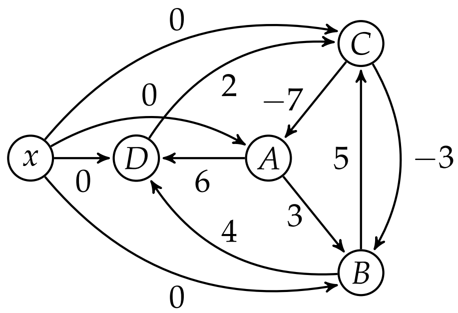
Les deux graphes sont isomorphes. Voici une correspondance possible entre leurs états :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	9	2	1	7	8	5	3	6	4

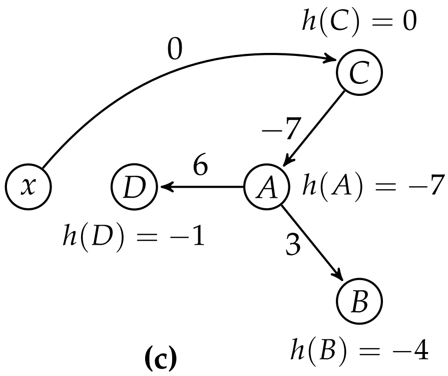
4 Algorithme de Johnson (9 points)



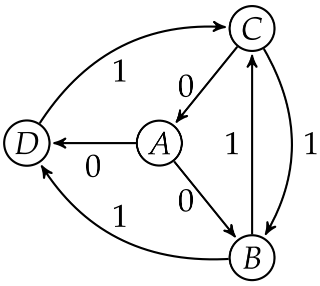
(a)



(b)



(c)



(d)

v	A	B	C	D
$h(v)$	-7	-4	0	-1
$d_A(v)$	0	0	1	0
$d_B(v)$	1	0	1	1
$d_C(v)$	0	0	0	1
$d_D(v)$	1	1	1	0

(e)

	A	B	C	D
A	0	3	8	6
B	-2	0	5	4
C	-7	-4	0	-1
D	-5	-2	2	0

(f)

L'algorithme de Johnson calcule les distances $D(u,v)$ pour toutes les paires de sommets $(u,v) \in V^2$ d'un graphe orienté $G = (V, E, \ell)$ ne possédant pas de cycle négatif. Il fonctionne en plusieurs étapes, illustrées par les figures ci-dessus. La figure **(a)** représente le graphe fourni en entrée, et le tableau **(f)** est la sortie qui donne les distances pour toutes les paires.

JOHNSON(G) :

J1. Ajouter un nouveau sommet x au graphe, et le connecter à tous les autres sommets, avec un poids nul. (Figure **(b)**.)

J2. Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford à partir du sommet x, pour calculer la distance $h(y)$ entre x et chaque sommet y. (La figure **(c)** montre les distances $h(y)$ obtenus, ainsi que l'arbre des plus courts chemins associés.)

J3. Créer un nouveau graphe $G' = (V, E, \ell')$ dans lequel $\ell'(u,v) = \ell(u,v) + h(u) - h(v)$. (Figure **(d)**.) Dans le graphe G' ainsi obtenu, tous les poids sont nécessairement positifs.

J4. Appliquer l'algorithme de Dijkstra $|V|$ fois, à partir de chacun des sommets u de G'. On obtient ainsi plusieurs tableaux d_u donnant les distances entre u et les autres sommets de G'. (Figure **(e)**.)

J5. Construire la matrice finale avec $D(u,v) = d_u(v) - h(v) + h(u)$, qui donne les distances dans G. (Figure **(f)**.)

J6. Retourner la matrice D ainsi construite.

Le but de l'exercice est de calculer la complexité de cet algorithme. Vous exprimerez toutes les complexités en fonction de $|E|$ et/ou $|V|$, la taille du graphe fourni en entrée. Vous pouvez supposer que le graphe est connexe pour simplifier vos réponses.

On suppose que le graphe est représenté avec une liste d'adjacence pour énumérer facilement les voisins, ainsi qu'avec une matrice de poids pour trouver rapidement un poids ou tester l'existence d'un arc (poids $\neq \infty$).

1. **(1.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J1 ?

Réponse :

Ajouter x dans le tableau des liste d'adjacence coûtera $\Theta(|V|)$ car il a $|V|$ voisins. Ajouter l'état dans la matrice est plus pénible : il faudra $\Theta(|V|^2)$ opérations pour agrandir la matrice de façon naïve. (Ceux qui veulent utiliser des astuces pour agrandir la matrice de façon plus efficace doivent se justifier.)
Donc $\Theta(|V|^2)$.

2. **(1.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J2 ?

Réponse :

Bellman-Ford tourne en $\Theta(|E| \cdot |V|)$.

3. **(1pt)** Quelle est la complexité de l'étape J3 ?

Réponse :

Si l'on respecte le sujet à la lettre, il est écrit "Créer un nouveau graphe". Donc il faudra copier la matrice d'adjacence en la mettant à jour, demandant ainsi $\Theta(|V|^2)$ opérations. (Copier la liste d'adjacence se fait en $\Theta(|E|)$, c'est moins, et ce n'est même pas utile : on peut réutiliser la même.)
Une autre interprétation possible (plus proche d'une mise en œuvre réelle de l'algorithme) et de modifier la matrice du graphe en place. Il suffit de parcourir les $|E|$ éléments de la liste d'adjacence pour savoir quelle case de la matrice mettre à jour. On fait donc $\Theta(|E|)$ opérations dans ce cas.

4. **(1.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J4 ?

Réponse :

Le Dijkstra du cours tourne en $\Theta((|E| + |V|) \log |V|)$ ce qui vaut aussi $\Theta(|E| \log |V|)$ puisque le graphe est connexe. Il est possible de le faire descendre la complexité à $\Theta(|E| + |V| \log |V|)$ en utilisant un tas de Fibonacci. Dans les tous les cas, il faut multiplier cette complexité par $|V|$, puisqu'on le répète pour chaque valeur.
Donc les réponses acceptées étaient $\Theta(|V||E| \log |V|)$ ou $\Theta(|V|(|E| + |V| \log |V|))$.

5. **(0.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J5 ?

Réponse :

On itère sur toutes les paires (u, v), donc $\Theta(|V|^2)$.

6. **(1pt)** En déduire la complexité totale de l'algorithme de Johnson.

Réponse :

La complexité est celle de l'étape J3, qui domine toutes les autres. On a donc $\Theta(|E| \cdot |V| \log |V|)$ ou $\Theta(|E| \cdot |V| + |V|^2 \log |V|)$ selon l'implémentation de tas choisie.

7. **(2pt)** Sous quelle condition l'algorithme de Johnson serait-il préférable à l'algorithme de Floyd-Warshall ?

Réponse :

Floyd-Warshall tourne en $\Theta(|V|^3)$. L'algo de Johnson n'est donc intéressant que si $|E| \log |V| = O(|V|^2)$ (cas du tas binaire) ou si $|E| = O(|V|^2)$ (cas du tas de Fibonacci). Ces deux cas sont possible avec un graphe peu dense.