Nom :
Prénom :

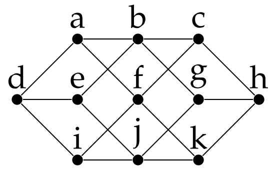
Examen de Théorie des Graphes

EPITA ING1 2014 S2; A. DURET-LUTZ

Durée : 1 heure 30

- Document autorisé : une seule page A4 manuscrite (recto/verso).
- Cet examen se déroule **sans calculatrice, téléphone, ou autre appareil électroménager**.
- Répondez dans les cadres de façon claire et concise.
- Le barème, indicatif, correspond à une note sur 26,5.

1 Graphe de Herschel (5,5 points)

On considère le graphe suivant : 

. Précisez les caractéristiques de ce graphe :

1. **(0,5pt)** Rayon

Réponse :

2. **(1pt)** Diamètre

Réponse :

3. **(0,5pt)** État(s) du centre

Réponse :

4. **(0,5pt)** Maille

Réponse :

5. **(0,5pt)** Nombre chromatique

Réponse :

6. **(0,5pt)** Taille de la plus grande clique

Réponse :

7. **(2pt)** Ce graphe est-il planaire ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

2 Graphes planaires (10 points)

Dans cet exercice on ne considère que des graphes simples, planaires, et non-orientés. Pour un tel graphe $G = (V, E)$, on note $n = |V|$ le nombre de sommets, $e = |E|/2$ le nombre d'arêtes, et f le nombre de faces. Le *degré moyen* d'un graphe est $\frac{1}{n}\sum_{v\in V} \deg(v)$.

1. **(2pts)** Justifiez que $3f \leq 2e$.

Réponse :

2. **(2pts)** Un graphe planaire connexe peut-il contenir deux cliques de taille 4 ? Justifiez-vous.

Réponse :

3. **(2pts)** On considère le graphe $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $E = (\{1, 2\} \times \{3, 4, \ldots, n\}) \cup (\{3, 4, \ldots, n\} \times \{1, 2\})$. Vers quelle valeur tend le degré moyen lorsque n tend vers l'infini ?

Réponse :

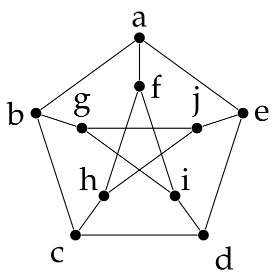
4. **(2pts)** Justifiez que le degré moyen d'un graphe planaire est strictement inférieur à 6.

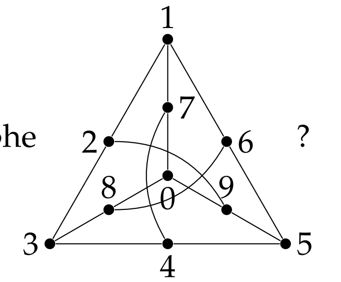
Réponse :

5. **(2pts)** Considérons un graphe planaire dans lequel tous les sommets v ont un degré $\deg(v) \geq 4$. Montrez que les *trois quarts* des sommets ont forcément un degré strictement inférieur à 7.

Réponse :

3 Iso-morflons (2 points)

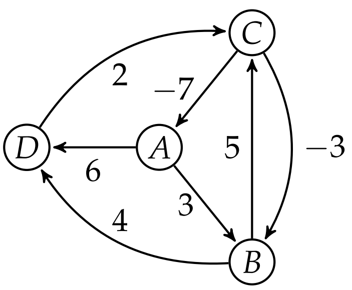
Le graphe 

est-il isomorphe au graphe 

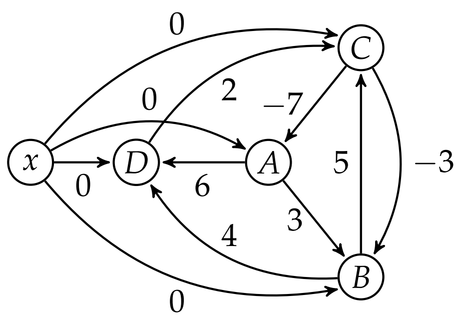
?

Réponse :

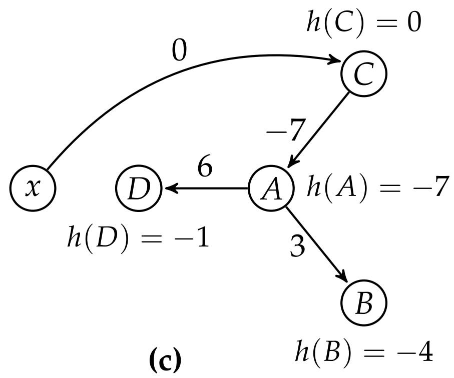
4 Algorithme de Johnson (9 points)



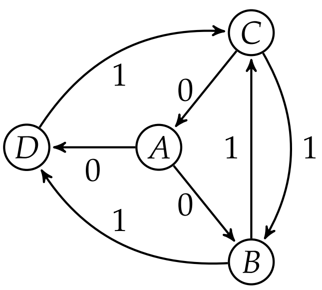
(a)



(b)



(c)



(d)

v	A	B	C	D
$h(v)$	-7	-4	0	-1
$d_A(v)$	0	0	1	0
$d_B(v)$	1	0	1	1
$d_C(v)$	0	0	0	1
$d_D(v)$	1	1	1	0

(e)

	A	B	C	D
A	0	3	8	6
B	-2	0	5	4
C	-7	-4	0	-1
D	-5	-2	2	0

(f)

L'algorithme de Johnson calcule les distances $D(u, v)$ pour toutes les paires de sommets $(u, v) \in V^2$ d'un graphe orienté $G = (V, E, \ell)$ ne possédant pas de cycle négatif. Il fonctionne en plusieurs étapes, illustrées par les figures ci-dessus. La figure **(a)** représente le graphe fourni en entrée, et le tableau **(f)** est la sortie qui donne les distances pour toutes les paires.

JOHNSON(G) :

J1. Ajouter un nouveau sommet x au graphe, et le connecter à tous les autres sommets, avec un poids nul. (Figure **(b)**.)

J2. Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford à partir du sommet x, pour calculer la distance $h(y)$ entre x et chaque sommet y. (La figure **(c)** montre les distances $h(y)$ obtenus, ainsi que l'arbre des plus courts chemins associés.)

J3. Créer un nouveau graphe $G' = (V, E, \ell')$ dans lequel $\ell'(u,v) = \ell(u,v) + h(u) - h(v)$. (Figure **(d)**.) Dans le graphe G' ainsi obtenu, tous les poids sont nécessairement positifs.

J4. Appliquer l'algorithme de Dijkstra $|V|$ fois, à partir de chacun des sommets u de G'. On obtient ainsi plusieurs tableaux d_u donnant les distances entre u et les autres sommets de G'. (Figure **(e)**.)

J5. Construire la matrice finale avec $D(u,v) = d_u(v) - h(v) + h(u)$, qui donne les distances dans G. (Figure **(f)**.)

J6. Retourner la matrice D ainsi construite.

Le but de l'exercice est de calculer la complexité de cet algorithme. Vous exprimerez toutes les complexités en fonction de $|E|$ et/ou $|V|$, la taille du graphe fourni en entrée. Vous pouvez supposer que le graphe est connexe pour simplifier vos réponses.

On suppose que le graphe est représenté avec une liste d'adjacence pour énumérer facilement les voisins, ainsi qu'avec une matrice de poids pour trouver rapidement un poids ou tester l'existence d'un arc (poids $\neq \infty$).

1. **(1.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J1 ?

Réponse :

2. **(1.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J2 ?

Réponse :

3. **(1pt)** Quelle est la complexité de l'étape J3 ?

Réponse :

4. **(1.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J4 ?

Réponse :

5. **(0.5pt)** Quelle est la complexité de l'étape J5 ?

Réponse :

6. **(1pt)** En déduire la complexité totale de l'algorithme de Johnson.

Réponse :

7. **(2pt)** Sous quelle condition l'algorithme de Johnson serait-il préférable à l'algorithme de Floyd-Warshall ?

Réponse :

FIN