Examen de Théorie des Graphes

EPITA ING1 2015 S2; S. Baarir

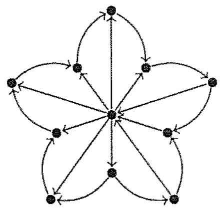
Durée : 1 heure 30

Mars-Avril 2015

Consignes

- Cet examen se déroule **sans document** et **sans calculatrice**.
- Le barème est indicatif et correspond à une note sur 24.

1 Propriétés de base (4,5 points)



Ce graphe est-il,

1. **(0,5pt)** Transitif ?
2. **(0,5pt)** Réflexif ?
3. **(0,5pt)** Symétrique ?
4. **(0,5pt)** Complet ?
5. **(0,5pt)** Connexe ?
6. **(1pt)** Fortement connexe ?
7. **(1pt)** 10-connexe ?

2 Divers (9,5 points)

1. **(2pts)** Montrez que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis dans un groupe. *(Indications : (1) trouver une modélisation avec un graphe ; (2) faire une preuve par l'absurde).*
2. **(1pt)** Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !) ? Pourquoi ?

3. **(2pts)** Comment peut-on utiliser l'exponentation rapide pour le calcul du plus court chemin dans un graphe ?
4. **(2,5pts)** Que calcul l'algorithme de Kosaraju et sur quel théorème se base-t-il pour le faire ?
5. **(2pts)** Donnez la définition d'un réseau de transport et d'un flot.

3 Problème 2-SAT (10 points)

Le problème "2-Satisfiability" (abrégé en 2-SAT) est celui de déterminer si une collection de variables booléennes, associées à un ensemble de contraintes sur les paires de variables, peut admettre une valuation (vrai/faux) qui satisfait toutes les contraintes.

Un problème 2-SAT est souvent décrit par une expression booléenne avec une forme spéciale : une conjonction de disjonctions. Chaque disjonction a deux arguments qui peuvent être des variables ou leurs négations. Par exemple, la formule suivante est sous une forme normale conjonctive (CNF) :

$$\phi = (a \vee b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg d) \wedge (b \vee d) \wedge (d \vee a)$$

Chaque disjonction est équivalente à une implication entre la négation d'un des arguments et l'autre. Par exemple,

$$(b \vee \neg c) \;\equiv\; (\neg b \Rightarrow \neg c) \;\equiv\; (c \Rightarrow b).$$

Grâce à cette équivalence, un problème 2-SAT peut être écrit sous une "Forme Normale Implicative (FNI)", c'est-à-dire, une conjonction d'implications.

1. **(1,5pt)** Écrivez la formule ϕ sous FNI. Existe-il d'autres FNI pour ϕ ? Justifiez.

Une FNI peut être représentée par un *graphe d'implications* : chaque sommet de ce graphe représente une variable ou sa négation et chaque arc met en évidence une relation d'implication entre les variables (ou leurs négations).

2. **(1,5pt)** Dessinez le graphe d'implication de ϕ. *(Attention : s'il y en a plusieurs, ce graphe doit prendre en compte toute FNI possible de ϕ).*

Un problème 2-SAT décrit sous une FNI est satisfiable (admet une solution) ssi quelque soit la variable x et sa négation $\neg x$, on a pas les deux séquences d'implications $x \Rightarrow y... \Rightarrow \neg x$ et $\neg x \Rightarrow z... \Rightarrow x$ en même temps. Ceci voudrait dire que $x \Leftrightarrow \neg x$, ce qui est naturellement faux !

3. **(2pt)** Comment peut-on utiliser le graphe d'implications pour vérifier la satisfiabilité de la formule qu'il représente ?

4. **(2pt)** Citez un algorithme qui réalise cette vérification et donnez sa complexité.

5. **(3pt)** Dans le cas ou la formule est satisfiable, comment trouve-t-on une affectation aux variables qui satisfait la formule ? *(Indication : il faut utiliser les résultats de l'algorithme que vous proposez en réponse à la question 4).*