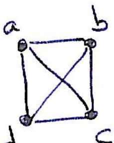
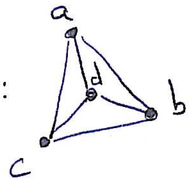
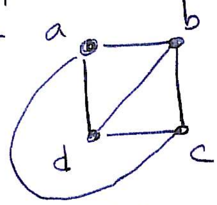
Graphe planaires

Déf: Un graphe est dit planaire s'il est possible de le représenter dans le plan sans croiser d'arêtes.

Ex. Le graphe K_4 : 

est planaire car on peut le représenter de cette façon : 

Note: Il n'est pas nécessaire que les arêtes soient des segments. Une autre représentation planaire de K_4 tout aussi valable est

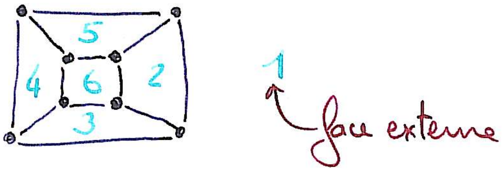


Voici un premier problème pour échauffer vos neurones. Nous le résoudrons avec des propriétés des graphes planaires, mais vous pouvez aussi essayer sans.

Problème 1 : un système de 11 villes doivent être reliées deux à deux directement soit par des canaux, soit par des chemins de fer.
Les contraintes sont les suivantes:
- les canaux et chemins de fer peuvent se croiser
- un canal ne peut pas croiser un autre canal
- un chemin de fer ne peut pas croiser un autre chemin de fer.

Est-ce possible? Si oui, proposez une solution.

Déf. Soit $G=(V,E)$ un graphe planaire représenté dans le plan sans croisements.
Une *face* F de G est une région du plan délimitée par des arêtes de G et qui ne contient aucune arête.
Le *degré* de la face F, noté $\deg(F)$, est le nombre d'arêtes qui bordent F.



Ce graphe (un cube) a 6 faces toutes de degré 4. Il ne faut pas oublier la face externe, qui est elle aussi une région du plan délimitée par des arêtes.

Convention Dans la suite on note

$n=|V|$ le nombre de sommets;

$e=|E|/2$ le nombre d'arêtes (on divise par 2 puisque $(x,y)\in E \iff (y,x)\in E$ dans un graphe non-orienté);

$f=?$ le nombre de faces.

On va établir une formule qui lie n, e, et f.

Prop. 1 La somme des degrés de toute les faces est égale au double du nombre d'arêtes

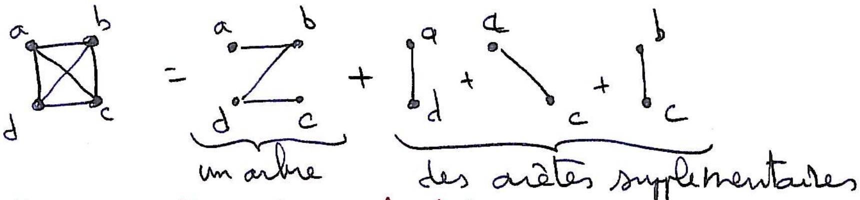
$$\sum_{F\in \text{faces}(G)} \deg(F) = 2e$$

Preuve: Chaque arête borde deux faces exactement. $\square$

Cette propriété est similaire à celle qui dit que $\displaystyle\sum_{x\in V} \deg(x) = 2e$ pour les sommets.

Nous verrons qu'il y a une dualité entre faces et sommets qui justifie cela.

<u>Prop. 2</u> Tout graphe connexe peut s'obtenir en ajoutant un certain nombre d'arêtes à un arbre (ayant le même nombre de sommets).

par. ex. 

⚠ cette propriété est valable sur tout graphe connexe, pas uniquement sur les graphes planaires.

<u>Preuve</u> par récurrence sur le nombre de cycles.

Posons $\mathcal{H}_n$ = « la prop. 2 est vraie sur un graphe connexe possédant n cycles ».

Si $n=0$ un graphe connexe et acyclique est un arbre donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{H}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et considérons un graphe G connexe avec $n+1$ circuit.

Choisissons une arête appartenant à un circuit et retirons-la : le graphe G' ainsi amputé possède au plus n circuits (car on en a cassé au moins un) et est toujours connexe (les chemins qui passaient par notre arête peuvent toujours utiliser l'autre côté du cycle. Par récurrence on peut donc construire G' à partir d'un arbre T auquel on ajoute des arêtes. En y ajoutant notre arête on obtient alors G, et $\mathcal{H}_n$ est vraie.

$\mathcal{H}_n$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$. $\square$

Th. (La formule d'Euler)

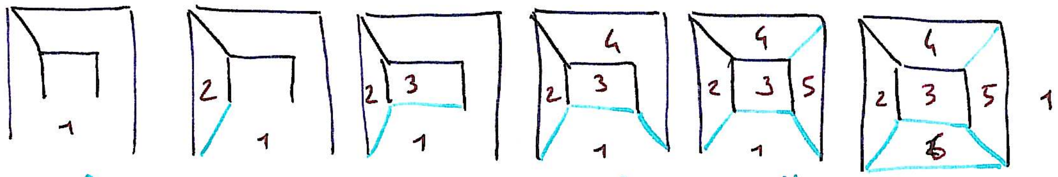
Pour tout graphe planaire connexe, $n - e + f = 2$.

Preuve A (nous en verrons une autre plus loin)

Montrons que cette formule est vraie sur un arbre, puis grâce à la prop. 2, qu'elle reste vraie en ajoutant des arcs qui n'en coupent pas d'autres (puisque le graphe est planaire)

- Si G est un arbre il n'y a qu'une face et $e = n - 1$ on vérifie donc $n - e + f = 2$.
- Si on ajoute une arête à un graphe planaire qui vérifie $n - e + f = 2$ alors
  - n ne change pas
  - e augmente d'un
  - f augmente d'un car une face a été coupée en deux

Ex.

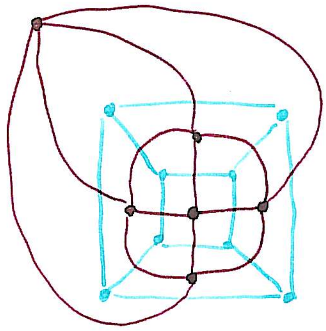


$e = 7$	$e = 8$	$e = 9$	$e = 10$	$e = 11$	$e = 12$
$n = 8$	$n = 8$	$n = 8$	$n = 8$	$n = 8$	$n = 8$
$f = 1$	$f = 2$	$f = 3$	$f = 4$	$f = 5$	$f = 6$

⚠ La formule d'Euler ne permet $\boxed{\text{pas}}$ d'écrire une horreur du style "G n'est pas planaire car il ne vérifie pas la formule d'euler". En effet la formule ne s'applique que sur les graphe planaires* et on aurait du mal à définir "f" en général.

* ce n'est pas tout à fait vrai, mais hors de nos considérations pour ce cours.

Voici une seconde preuve de la formule d'Euler, basée sur la notion de graphe dual.

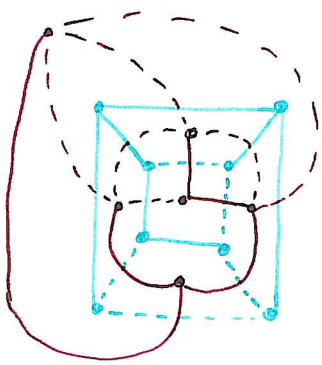


<u>Déf.</u> Soit G un graphe planaire connexe. On note G^* son <u>graphe dual</u> (ne pas confondre avec graphe complémentaire) formé en plaçant un sommet sur chaque face de G et en reliant ces sommets par des arêtes croisant celles de G qui bordent chaque face.

<u>Notes</u>

1) Si G est un graphe simple, G^* ne l'est pas forcément.
2) $G^{**} = G$
3) si on note n^*, e^*, f^* les paramètres de G^*, on a $n = f^*$, $f = n^*$, et $e = e^*$. Cela justifie d'une autre façon que $\sum_{F \in \text{faces}} \deg(F) = \sum_{x \in V} \deg(x) = e = e^*$ comme vu dans la Prop. 1.
4) Si on prend un cycle C de G, le graphe G^* amputé des arêtes qui croisent C est non connexe.

<u>Preuve B</u> de la formule d'Euler



Soit T un arbre courant de G et T' le graphe partiel obtenu en ôtant de G^* les arêtes qui croisent T.

a) T' est connexe, car on peut toujours contourner l'arbre T pour relier les faces de G
b) T' est acyclique car si un cycle existait dans T', T ne serait pas connexe.

T' est donc un arbre courant de G^*.

On a $\text{edges}(T) + \text{edges}(T') = \text{edges}(G) = \text{edges}(G^*)$ par construction et d'autre par puisque T et T' sont des arbres... $\begin{cases} \text{edges}(T) = n - 1 \\ \text{edges}(T') = n^* - 1 = f - 1 \end{cases}$

d'où $n - 1 + f - 1 = e$

et enfin $n - e + f = 2$ $\square$

<u>Critère de planarité</u> Soit G un graphe simple connexe.

Si G est planaire, alors $e \leq 3n - 6$

Si de plus G est sans triangle, alors $e \leq 2n - 4$.

<u>Note</u>: Ceci implique aussi que $|E| = \Theta(|V|)$.

<u>Demo</u>: Si G est $\underbrace{\text{un graphe simple}}_{\substack{\text{toute face est bordée} \\ \text{par au moins trois} \\ \text{arêtes}}}$ $\underbrace{\text{connexe et planaire}}_{\substack{\text{la formule d'Euler} \\ \text{s'applique.}}}$

$\forall F, \quad deg(F) \geq 3$

$$\sum_{F \in faces} deg(F) \geq 3f$$

prop. 1

$$2e \geq 3f$$

formule d'Euler

$$2e \geq 3(2 + e - n)$$

d'où $\quad e \leq 3n - 6 \quad \square$

Si G n'a pas de triangle la démonstration est similaire et commence par $deg(F) \geq 4$.

<u>Généralisation</u> si le plus petit cycle de G est de taille g (on dit que g est la <u>maille</u> de G, <u>girth</u> = tour de taille en anglais) on a $e \leq \dfrac{g}{g-2}(n-2)$.

⚠ Toutes ces inégalités sont des <u>conditions nécessaires</u> pour qu'un graphe soit planaire mais elles ne sont pas suffisantes. On peut donc, si on a de la chance, s'en servir pour montrer qu'un graphe n'est pas planaire.

Application au Problème 1

On construit un réseau pour 11 villes reliées 2 à 2.

Il y a donc $C_{11}^{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$ connexions.

Ces connexions sont de 2 types : – les canaux
– les chemins de fer.

Notons G_1 le graphe des canaux

G_2 le graphe des chemins de fer

$n_1 \leq 11$ $\quad e_1 + e_2 = 55$

$n_2 \leq 11$

Ces deux graphes doivent être planaires donc ils vérifient

$$e_1 \leq 3n_1 - 6 = 27$$

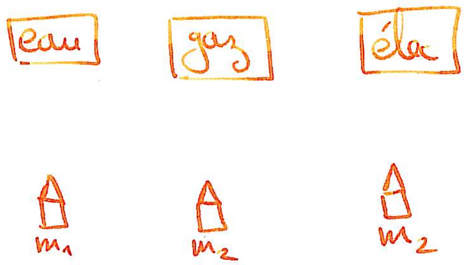
$$e_2 \leq 3n_2 - 6 = 27$$

$$55 = e_1 + e_2 \leq 54 \quad \text{contradiction.}$$

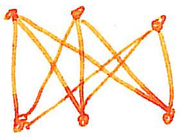
L'un des deux graphes doit forcément avoir au moins 28 arêtes et ne peut être planaire.

Il n'y a donc pas de solution à ce problème.

Problème 2



Comment relier ces 3 maisons aux usines d'eau, de gaz, et d'électricité sans croiser d'arêtes ?

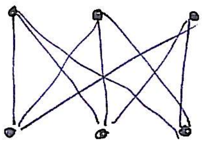
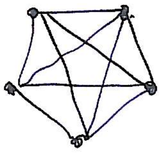
Cela revient à demander si le graphe $K_{3,3}$  est planaire.

Le premier critère $e \leq 3n - 6$, i.e. $9 \leq 12$ est vérifié :-(

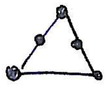
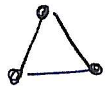
Mais on remarque que ce graphe ne possède pas de triangle (il est bi-parti) donc on devrait avoir $e \leq 2n - 4$ i.e. $9 \leq 8$ s'il était planaire.

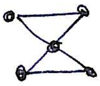
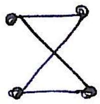
$\Rightarrow$ ce n'est pas le cas.

Th. de Kuratowski Un graphe est planaire ssi il ne contient pas de sous-graphe qui est une subdivision de $K_{3,3}$ ou de K_5.

$K_{3,3}$  K_5 

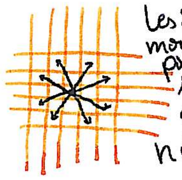
Note : c'est une condition nécessaire et suffisante ! Cependant il est souvent plus facile de trouver une subdivision de $K_{3,3}$ ou K_5 dans un graphe (pour prouver qu'il n'est pas planaire) que de démontrer leur absence (pour prouver la planarité).

Une subdivision d'un graphe est le résultat de l'ajout d'un sommet sur une arête, mais pas à une intersection d'arête. P. ex  est une subdivision de 

Mais  n'est pas une subdivision de 

Deux exemples de preuves de planarité ou non.

1) On imagine les déplacements d'un cavalier aux échecs mais sur une grille 3x4.



1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

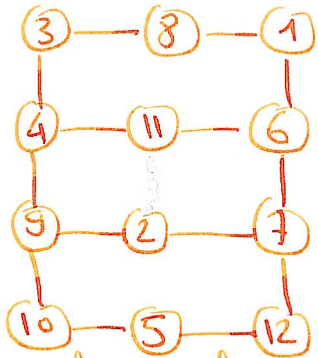
On peut calculer les paramètres du graphe des déplacements sans le dessiner : il y a $n = 12$ sommets dont 8 de degré 2 (cases 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 12 avec 2 mouvements possibles) et 4 ——— 3 (——— 4, 6, 7, 9)

Donc $e = \frac{8 \times 2 + 4 \times 3}{2} = 14$ arêtes

Pas de triangles, car un cavalier ne peut pas revenir à sa place en trois mouvements, donc le graphe doit vérifier $e \leq 2n - 4$ s'il est planaire.
ici $14 \leq 20$, rien de choquant.

Seulement après avoir vérifié cette formule peut-on tenter de représenter le graphe de façon planaire.

Ici, on y arrive :



note : comme il n'y a que 4 sommets de degrés ≤ 3 on sait que ce graphe ne peut contenir $K_{3,3}$ et donc d'après Kuratowski, qu'il est planaire.

(Une fois qu'on a mis ce graphe à plat, il saute aux yeux qu'un chemin hamiltonien y existe et qu'on peut donc visiter toutes les cases exactement une fois avant de revenir au point de départ.)

2) Tentons la même chose sur un graphe 4×4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

cases de degré 2 : 1, 4, 13, 16

cases de degré 3 : 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 16

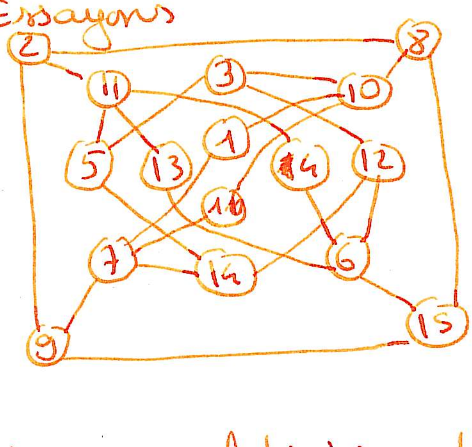
cases de degré 4 : 6, 7, 10, 11

$n = 16 \quad e = \dfrac{4\times 2 + 8\times 3 + 4\times 4}{2} = 24$

toujours pas de triangles (pour la même raison) donc si le graphe est planaire il devrait vérifier $e \leq 2n-4$

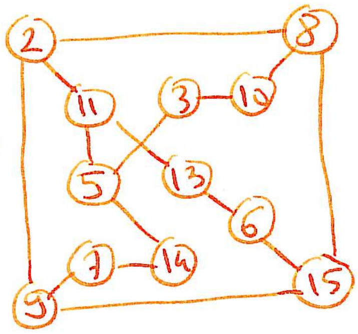
$24 \leq 28$ cela semble OK.

Essayons

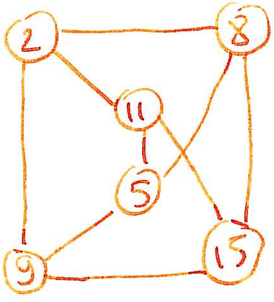
G : 

ça n'a pas l'air facile...

Virons les nœuds 1, 16, 4, 12

G' : 

G' est une subdivision de



qui est isomorphe à $K_{3,3}$. D'après le Théorème de Kuratowski, G (et G') n'est donc pas planaire.

(Mais cela ne nous dit rien sur l'existence ou non d'un tour du cavalier.)

Prop. 3 Tout graphe simple planaire possède au moins un sommet x tel que $\deg(x) \leq 5$.

Démonstration par l'absurde. Supposons qu'il existe un graphe simple et planaire $G=(V,E)$ tel que $\forall x \in V, \deg(x) \geq 6$.

On en déduit que $2e = \sum_{x \in V} \deg(x) \geq 6n$

d'où $e \geq 3n$ ce qui contredit le critère de planarité qui voudrait que $e \leq 3n-6$. $\square$

Une autre démonstration possible consiste à calculer le degré moyen $\frac{2e}{n}$ à partir du critère de planarité :

si $e \leq 3n-6$ alors $\frac{2e}{n} \leq 6 - \frac{6}{n} < 6$. Ainsi, pour que la moyenne des degrés soit <6 il faut qu'il y ait au moins des sommets de degrés ≤ 5.

Théorème des 5 couleurs Tout graphe planaire est 5-coloriable (c'est-à-dire qu'on peut colorier ses sommets sans que deux voisins ne partagent la même couleur en utilisant au plus 5 couleurs).

Note le Théorème des 4 couleurs dit que tout graphe planaire est 4 coloriable, ce qui est encore mieux, mais beaucoup plus difficile à prouver.

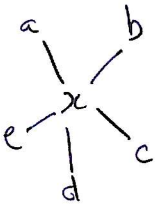
Démonstration du Th des 5 couleurs.

La présence de multi-arcs dans un graphe ne change pas la façon de le colorier, donc on peut se restreindre à des graphes simples pour cette preuve.

Montrons, par récurrence sur sa taille n, qu'un graphe simple planaire est 5-coloriable :

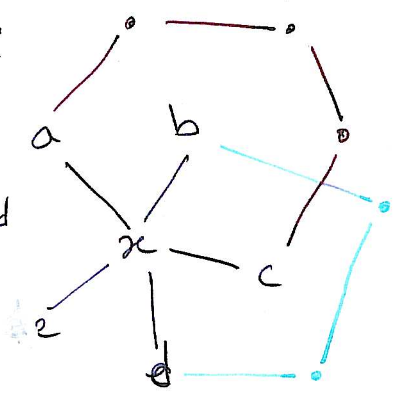
- si $n \leq 5$ il suffit d'utiliser une couleur par sommet
- (facultatif) si $n = 6$ on peut considérer deux cas :
  a) le graphe est complet : tous les sommets sont reliés par $C_6^2 = 15$ arêtes. La formule $e \leq 3n - 6$ n'est pas respectée et il est impossible que ce graphe soit planaire.
  b) il existe deux sommets non reliés : on peut alors leur donner la même couleur et utiliser les 4 autres couleurs sur les 4 sommets restant.
- si $n \geq 6$, supposons que tout graphe simple planaire d'ordre $< n$ est 5 coloriable et montrons qu'un graphe G d'ordre n l'est aussi.

  Puisque G est planaire et simple, il possède un sommet x de degré ≤ 5 (prop. 3) et le graphe $G \setminus \{x\}$ est 5-coloriable par hypothèse de récurrence



  a) si deux points voisins de x ont la même couleur, alors il reste une couleur disponible pour x.
  b) sinon, notons a, b, c, d, e les 5 voisins, dans un ordre circulaire.
  Notons G_{ac} le sous-graphe de G engendré pour les sommets qui on la couleur de a ou de c.
  Si a et c sont dans des composantes différentes de G_{ac} alors il suffit par exemple de permuter les couleurs de la composante qui contient a, afin que a et c aient la même couleur, ce qui libère une couleur pour x.

  Si a et c sont dans la même composante on recommence la même astuce sur le graphe G_{bd} engendré par les sommets qui partagent les couleurs de b et d. Cette fois-ci il est impossible que b et d soient dans la même composante de G_{bd} sinon il existerait un chemin de a à c et un chemin de b à d qui doivent se croiser : or il ne peuvent pas croiser d'arêtes (graphe planaire) et pas partager de sommets (couleurs différentes).

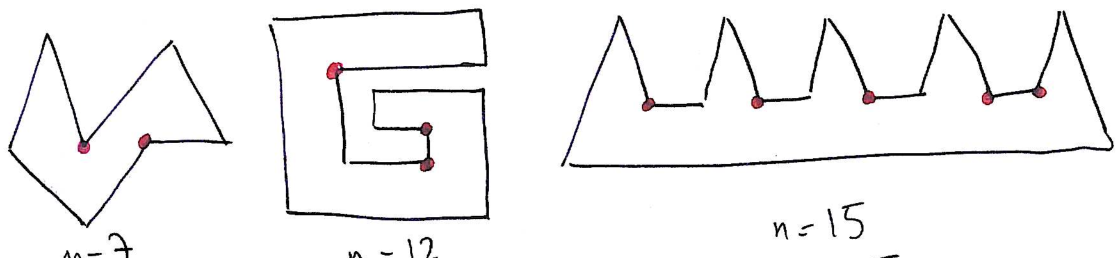


On peut donc inverser les couleurs des sommets de la composante de b dans G_{bd}, afin que b et d aient la même couleur, ce qui libère une couleur pour x.

G est donc 5-coloriable $\square$

Surveiller une galerie d'art

On considère une galerie d'art représentée sous la forme d'un polygone avec n côtés. Combien de caméras 360° faut-il installer pour surveiller toute la galerie ?

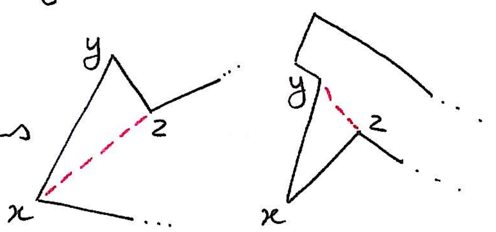


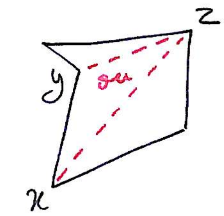
$n = 7$ guards : 2 — $n = 12$ guards = 3 — $n = 15$ guards = 5

Théorème de la galerie d'art Une galerie de n côtés peut être surveillée depuis $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ points ou moins.

Lemme 1 Tout polygone peut être triangulé.

Preuve on se place en un sommet x et qu'on regarde un sommet voisin y, imaginons qu'on se tourne lentement vers l'intérieur du polygone jusqu'à voir un sommet z. Alors on peut relier soit x à z, soit y à z, et il n'existe pas de sommet à l'intérieur du triangle xyz, sinon on l'aurait vu avant de trouver z.



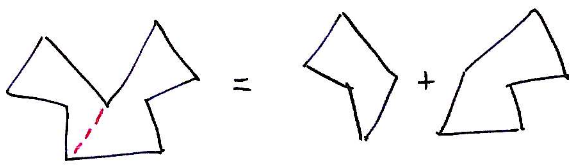


On répète ce procédé dans chaque polygone plus gros qu'un triangle, jusqu'à n'avoir que des triangles.

Lemme 2 Toute triangulation d'un polygone est 3-coloriable.

Preuve par récurrence sur le nombre de sommets.

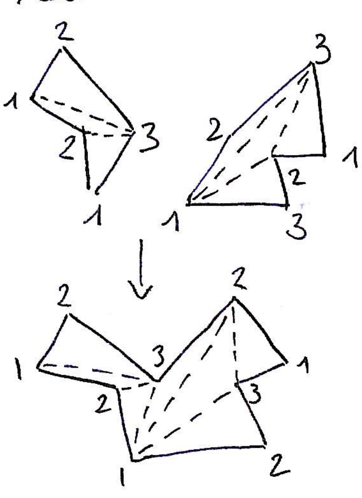
Dans un polygone de n sommets il existe une diagonale entre deux sommets qui reste à l'intérieur du polygone (cf. lemme 1).



cette diagonale permet de découper le polygone de n sommets en 2 polygones avec moins de n sommets.

La récurrence s'arête sur des triangles qui sont 3-coloriable sans soucis.

Si les deux sous-graphe sont 3-coloriables, par hypothèse de récurence :



alors il suffit de recolorier l'un des deux en permutant les couleurs pour qu'elles coïncident sur l'arête commune.

Preuve du théorème des 3 couleurs.

trianguler le polygone, le colorier avec trois couleurs, et placer les caméras aux sommets ayant la couleur minoritaire.