LOFO – Logique Formelle
Les entiers de Church

EPITA – **Tous documents autorisés** [*]

Juin 2005 (1h30)

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

1 λ-calcul

Dans ce sujet on s'intéresse aux « entiers de Church », une façon de coder les nombres naturels directement en λ-calcul, sans avoir à l'étendre avec de nouvelles constantes (comme `0` et `succ`).

L'idée est simple : les entiers de Church sont des fonctions de répétition. Le nombre de Church $\underline{0}$ applique 0 fois son argument fonction à un argument valeur, $\underline{42}$ le fait 42 fois. On pose :

$$\underline{n} = \lambda f \cdot \lambda x \cdot \underbrace{(f) \cdots (f)}_{n \text{ fois}} x$$

1. Écrire $\underline{2}$ et $\underline{3}$.
2. Écrire une fonction succ qui prenne $\underline{n}$ et calcule $\underline{n+1}$.
3. Écrire une fonction plus qui prennent deux entiers $\underline{n}$ et $\underline{m}$ et calcule $\underline{n+m}$. Attention aux associativités.

2 λ-calcul Simplement Typé

1. Quel est le type de $\underline{1}$? Le prouver en fournissant l'arbre de preuve.
2. Quel est le type de $\underline{2}$? Le prouver en fournissant l'arbre de preuve.
3. Quel est le type de $\underline{n}$ pour $n > 2$? Le prouver.

   Dans la suite on considère que tous les entiers $\underline{n}$ ont ce dernier type qu'on abrégera ι, y compris $\underline{0}$ et $\underline{1}$.
4. Écrire le type de plus.
5. Faisons l'hypothèse de l'existence d'une fonction fois pour la multiplication. Quel est son type ?

[*] "Tout document autorisé" signifie que notes de cours, livres, annales, etc. sont explicitement consultables pendant l'épreuve. En cas de problème contacter le LRDE au 01 53 14 59 22.

3 Déduction Naturelle

On rappelle les règles de la déduction naturelle de la logique intuitionniste.

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\Rightarrow\mathcal{E} \qquad \dfrac{\bot}{A}\bot\mathcal{E} \qquad \neg A := A \Rightarrow \bot$$

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge l\mathcal{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\wedge r\mathcal{E}$$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\vee l\mathcal{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\vee r\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\vee\mathcal{E}$$

1. Prouver que $(A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A$. Qu'est-ce que ça vous rappelle ?
2. Prouver $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$.
3. Montrer que $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.

4 Calcul des Séquents

On rappelle les règles du calcul des séquents classique.

Calcul des Séquents Classiques

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)}\vdash\mathrm{X} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\mathrm{X}\vdash \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\vdash\mathrm{W} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\mathrm{W}\vdash \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\vdash\mathrm{C} \quad \dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\mathrm{C}\vdash$$

$$\dfrac{}{F \vdash F}\mathrm{Id} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\mathrm{Cut}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\vdash\neg \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\neg\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\vdash\wedge \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}l\wedge\vdash \qquad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}r\wedge\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\vdash l\vee \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\vdash r\vee \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\vee\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}\Rightarrow\!\vdash \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\vdash\!\Rightarrow$$

1. Prouver que $(A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A$.
2. Prouver $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$.
3. Montrer que $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.
4. Montrer que $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation classique.