Correction du Partiel LOFO – Logique Formelle

EPITA – **Sans document**

Juin 2006 (1h30)

Le sujet et sa correction ont été écrits par Akim Demaille.

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

1 λ-calculus

1. Quels sont les termes α-équivalents parmi les suivants ?

$$\lambda x \cdot xy, \quad \lambda x \cdot xz, \quad \lambda y \cdot yz, \quad \lambda z \cdot zz, \quad \lambda z \cdot zy, \quad \lambda f \cdot fy, \quad \lambda f \cdot ff$$

$$\lambda y \cdot \lambda x \cdot xy, \quad \lambda z \cdot \lambda y \cdot yz.$$

2. Donner un terme α-équivalent au suivant dans lequel toutes les variables liées ont un nom différent.

$$\lambda x \cdot ((x\ (\lambda y \cdot x\ y))(\lambda x \cdot x))(\lambda y \cdot y\ x)$$

3. Effectuer une β-réduction de Y.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Z} & = & \lambda z\ x \cdot x(z\ z\ x) \\ \mathsf{Y} & = & \mathsf{Z}\,\mathsf{Z} \end{array}$$

4. Montrer que

$$\mathsf{Y}f \xrightarrow{*} f(\mathsf{Y}f)$$

5. En admettant l'existence de `if`, `less-or-equal`, `mul`, `sub`, et des entiers, avec les comportements attendus, posons:

$$\begin{array}{rcl} \texttt{factF} & = & \lambda f\ x \cdot (\texttt{if}\ (\texttt{less} - \texttt{or} - \texttt{equal}\ x\ 1)\ 1\ (\texttt{mul}\ x\ (f\ (\texttt{sub}\ x\ 1)))) \\ \texttt{fact} & = & \mathsf{Y}(\texttt{factF}) \end{array}$$

Développer les étapes de calculs de `fact` 2.

2 λ-calculus Simplement Typé

Type derivations are trees built from the following nodes.

$$\frac{M : \sigma \to \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \qquad \frac{\begin{array}{c}[x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau\end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \to \tau}$$

1. Quels sont les propriétés apportées au λ-calculus par les types simples?
2. Donner l'arbre de jugement de type pour le terme suivant:

$$\mathsf{S} \quad = \quad \lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda z \cdot ((x\ z)(y\ z))$$

3. Même question pour Y défini en Section 1.item 3.

3 Déduction Naturelle Intuitionniste

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I} \qquad \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\Rightarrow\mathcal{E} \qquad \frac{\bot}{A}\bot\mathcal{E} \qquad \neg A := A \Rightarrow \bot$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathcal{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge l\mathcal{E} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge r\mathcal{E}$$

$$\frac{A}{A \vee B}\vee l\mathcal{I} \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee r\mathcal{I} \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\vee\mathcal{E}$$

Démontrer les propositions suivantes.

1. $(A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A$

Correction:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A]^2 \quad [A \Rightarrow A]^1}{A}\Rightarrow\mathcal{E}}{A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathcal{I}_2}{(A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

2. $A \vee B, \neg B \vdash A$

Correction: Recall that $\neg B := B \Rightarrow \bot$.

$$\cfrac{A \vee B \qquad [A]^1 \qquad \cfrac{\cfrac{[B]^2 \quad B \Rightarrow \bot}{\bot}\Rightarrow\mathcal{E}}{A}\bot\mathcal{E}}{A}\vee\mathcal{E}_1$$

3. $A \vee \neg A$

Correction: C'est pas intuitionniste !

4 Calcul des Séquents Classique

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X\vdash \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W\vdash \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C\vdash$$

$$\frac{}{F \vdash F} \mathrm{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \mathrm{Cut}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash\neg \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash\wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} l\wedge\vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r\wedge\vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash l\vee \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r\vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow\vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \vdash\Rightarrow$$

Prouver les séquents suivants.

1. $\vdash A \Rightarrow (A \wedge B) \vee B \Rightarrow (A \wedge B)$

   Correction: Plusieurs ont utilisé une preuve qui a l'air correcte, mais prouve autre chose : $\vdash A \Rightarrow ((A \wedge B) \vee B \Rightarrow (A \wedge B))$.

2. $A \vee B, \neg B \vdash A$

3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante, portant sur les points (x, y) du plan:

$$(x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)) \vee (y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0))$$