

LOFO – Logique Formelle

EPITA – Sans document

Juin 2006 (1h30)

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

1 λ -calculus

1. Quels sont les termes α -équivalents parmi les suivants ?

$$\lambda x \cdot xy, \quad \lambda x \cdot xz, \quad \lambda y \cdot yz, \quad \lambda z \cdot zz, \quad \lambda z \cdot zy, \quad \lambda f \cdot fy, \quad \lambda f \cdot ff$$
$$\lambda y \cdot \lambda x \cdot xy, \quad \lambda z \cdot \lambda y \cdot yz.$$

2. Donner un terme α -équivalent au suivant dans lequel toutes les variables liées ont un nom différent.

$$\lambda x \cdot ((x (\lambda y \cdot x y))(\lambda x \cdot x))(\lambda y \cdot y x)$$

3. Effectuer une β -réduction de Y .

$$Z = \lambda z x \cdot x(z z x)$$
$$Y = Z Z$$

4. Montrer que

$$Y f \rightarrow^* f(Y f)$$

5. En admettant l'existence de `if`, `less-or-equal`, `mul`, `sub`, et des entiers, avec les comportements attendus, posons:

$$\text{factF} = \lambda f x \cdot (\text{if } (\text{less-or-equal } x 1) 1 (\text{mul } x (f (\text{sub } x 1))))$$
$$\text{fact} = Y(\text{factF})$$

Développer les étapes de calculs de `fact 2`.

2 λ -calculus Simplement Typé

Type derivations are trees built from the following nodes.

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \quad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \rightarrow \tau}$$

1. Quels sont les propriétés apportées au λ -calculus par les types simples?

2. Donner l'arbre de jugement de type pour le terme suivant:

$$S = \lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda z \cdot ((x z)(y z))$$

3. Même question pour Y défini en Section 1.item 3.

3 Dédution Naturelle Intuitionniste

$$\frac{[A] \vdots B}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \quad \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E \quad \frac{\perp}{A} \perp E \quad \neg A := A \Rightarrow \perp$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge lE \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge rE$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee lI \quad \frac{B}{A \vee B} \vee rI \quad \frac{[A] \vdots C \quad [B] \vdots C}{A \vee B \quad C} \vee E$$

Démontrer les propositions suivantes.

1. $(A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A$
2. $A \vee B, \neg B \vdash A$
3. $A \vee \neg A$

4 Calcul des Séquents Classique

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \tau X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} \sigma X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \tau W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \tau \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \tau C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \tau$$

$$\frac{}{F \vdash F} Id \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} Cut$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg \tau \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \tau$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge \tau \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge l \tau \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge r \tau$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee l \tau \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee r \tau \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \tau$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow \tau \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow \tau$$

Prouver les séquents suivants.

1. $\vdash A \Rightarrow (A \wedge B) \vee B \Rightarrow (A \wedge B)$
2. $A \vee B, \neg B \vdash A$
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante, portant sur les points (x, y) du plan:

$$(x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)) \vee (y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0))$$