

LOFO – Logique Formelle

Les entiers de Church

EPITA – **Aucun document/ordinateur/calculatrice autorisé**

Décembre 2007 (1h30)

Désolé de ne pas avoir trouvé plus de temps pour vous rédiger une épreuve originale, ceux qui ont travaillé leurs annales ont certainement des facilités. . .

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

1 λ -calculus

Dans ce sujet on s'intéresse aux « entiers de Church », une façon de coder les nombres naturels directement en λ -calculus, sans avoir à l'étendre avec de nouvelles constantes (comme $\mathbf{0}$ et succ).

L'idée est simple : les entiers de Church sont des fonctions de répétition. Le nombre de Church $\underline{0}$ applique 0 fois son argument fonction à un argument valeur, $\underline{42}$ le fait 42 fois. On pose :

$$\underline{n} = \lambda f \cdot \lambda x \cdot \underbrace{(f \dots (f x) \dots)}_{n \text{ fois}}$$

1. Écrire $\underline{2}$ et $\underline{3}$.
2. Écrire une fonction succ qui prenne \underline{n} et calcule $\underline{n+1}$.
3. Écrire une fonction plus qui prennent deux entiers \underline{n} et \underline{m} et calcule $\underline{n+m}$. Attention aux associativités.

2 λ -calculus Simplement Typé

Type derivations are trees built from the following nodes.

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \qquad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \rightarrow \tau}$$

1. Quel est le type de $\underline{1}$? Le prouver en fournissant l'arbre de preuve.
2. Quel est le type de $\underline{2}$? Le prouver en fournissant l'arbre de preuve.
3. Quel est le type de \underline{n} pour $n > 2$? Le prouver.

Dans la suite on considère que tous les entiers \underline{n} ont ce dernier type qu'on abrégera ι , y compris $\underline{0}$ et $\underline{1}$.

4. Écrire le type de plus .

5. Faisons l'hypothèse de l'existence d'une fonction fois pour la multiplication. Quel est son type ?

3 Déduction Naturelle Intuitionniste

$$\begin{array}{c}
[A] \\
\vdots \\
B \\
\hline
A \Rightarrow B \Rightarrow I
\end{array}
\quad
\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E
\quad
\frac{\perp}{A} \perp E
\quad
\neg A := A \Rightarrow \perp$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I
\quad
\frac{A \wedge B}{A} \wedge E
\quad
\frac{A \wedge B}{B} \wedge rE$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I
\quad
\frac{B}{A \vee B} \vee rI
\quad
\frac{[A] \quad \vdots \quad C \quad [B] \quad \vdots \quad C}{C} \vee E$$

1. Prouver que $(A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A$. Qu'est-ce que ça vous rappelle, et pourquoi ce n'est pas un simple hasard ?
2. Prouver $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$.
3. Montrer que $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.

4 Calcul des Séquents Classique

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X
\quad
\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X \vdash
\quad
\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W
\quad
\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \vdash
\quad
\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C
\quad
\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \vdash$$

$$\frac{}{F \vdash F} \text{Id}
\quad
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash \neg
\quad
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash \wedge
\quad
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} I \wedge \vdash
\quad
\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r \wedge \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash \vee
\quad
\frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r \vee
\quad
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow
\quad
\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow \vdash$$

1. Prouver que pour toute formule F , on a $F \vdash F$.
2. Prouver $(F \wedge G) \Rightarrow H \vdash (F \Rightarrow H) \vee (G \Rightarrow H)$.
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante, portant sur les points (x, y) du plan:

$$(x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)) \vee (y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0))$$

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte des renseignements ci-dessous pour noter votre copie. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

1. Identité

Option:

Nom:

2. Assiduité

- a Jamais venu
- b Presque jamais venu
- c Souvent venu
- d Toujours présent

3. Travail personnel

- a Rien
- b Bachotage récent
- c Relu les notes entre chaque cours
- d Fait les annales
- e Lu d'autres sources

4. Ce cours

- a Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
- b Est difficile à suivre mais j'essaie
- c Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
- d Est trop élémentaire

5. Ce cours

- a Ne m'a donné aucune satisfaction
- b N'a aucun intérêt dans ma formation
- c Est une agréable curiosité
- d Je le recommande

6. L'enseignant

- a N'est pas pédagogue
- b Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- c Me parle
- d Se répète vraiment trop
- e Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut