

# LOFO – Logique Formelle

## Les entiers de Church

EPITA – **Aucun document/ordinateur/calculatrice autorisé**

Décembre 2007 (1h30)

Désolé de ne pas avoir trouvé plus de temps pour vous rédiger une épreuve originale, ceux qui ont travaillé leurs annales ont certainement des facilités. . .

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

### 1 $\lambda$ -calculus

Dans ce sujet on s'intéresse aux « entiers de Church », une façon de coder les nombres naturels directement en  $\lambda$ -calculus, sans avoir à l'étendre avec de nouvelles constantes (comme  $\mathbf{0}$  et  $\text{succ}$ ).

L'idée est simple : les entiers de Church sont des fonctions de répétition. Le nombre de Church  $\underline{0}$  applique 0 fois son argument fonction à un argument valeur,  $\underline{42}$  le fait 42 fois. On pose :

$$\underline{n} = \lambda f \cdot \lambda x \cdot \underbrace{(f \dots (f x) \dots)}_{n \text{ fois}}$$

1. Écrire  $\underline{2}$  et  $\underline{3}$ .
2. Écrire une fonction  $\text{succ}$  qui prenne  $\underline{n}$  et calcule  $\underline{n+1}$ .
3. Écrire une fonction  $\text{plus}$  qui prennent deux entiers  $\underline{n}$  et  $\underline{m}$  et calcule  $\underline{n+m}$ . Attention aux associativités.

### 2 $\lambda$ -calculus Simplement Typé

Type derivations are trees built from the following nodes.

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \qquad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \rightarrow \tau}$$

1. Quel est le type de  $\underline{1}$  ? Le prouver en fournissant l'arbre de preuve.
2. Quel est le type de  $\underline{2}$  ? Le prouver en fournissant l'arbre de preuve.
3. Quel est le type de  $\underline{n}$  pour  $n > 2$  ? Le prouver.

Dans la suite on considère que tous les entiers  $\underline{n}$  ont ce dernier type qu'on abrégera  $\iota$ ,  $y$  compris  $\underline{0}$  et  $\underline{1}$ .

4. Écrire le type de  $\text{plus}$ .

5. Faisons l'hypothèse de l'existence d'une fonction fois pour la multiplication. Quel est son type ?

### 3 Dédution Naturelle Intuitionniste

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \quad \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E \quad \frac{\perp}{A} \perp E \quad \neg A := A \Rightarrow \perp \\
 \\
 \frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge rE \\
 \\
 \frac{A}{A \vee B} \vee I \quad \frac{B}{A \vee B} \vee rI \quad \frac{[A] \quad \vdots \quad A \vee B \quad [B] \quad \vdots \quad C}{C} \vee E
 \end{array}$$

1. Prouver que  $(A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A$ . Qu'est-ce que ça vous rappelle, et pourquoi ce n'est pas un simple hasard ?
2. Prouver  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$ .
3. Montrer que  $A \vee B, \neg B \vdash A$ , en utilisant la négation intuitionniste.

### 4 Calcul des Séquents Classique

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \vdash \\
 \\
 \frac{}{F \vdash F} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash \neg \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \vdash \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash \wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} I \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r \wedge \vdash \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \vdash \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \vdash \Rightarrow
 \end{array}$$

1. Prouver que pour toute formule  $F$ , on a  $F \vdash F$ .
2. Prouver  $(F \wedge G) \Rightarrow H \vdash (F \Rightarrow H) \vee (G \Rightarrow H)$ .
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante, portant sur les points  $(x, y)$  du plan:

$$(x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)) \vee (y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0))$$

## 5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte des renseignements ci-dessous pour noter votre copie. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

### 1. Identité

**Option:**

**Nom:**

### 2. Assiduité

- a Jamais venu
- b Presque jamais venu
- c Souvent venu
- d Toujours présent

### 3. Travail personnel

- a Rien
- b Bachotage récent
- c Relu les notes entre chaque cours
- d Fait les anaales
- e Lu d'autres sources

### 4. Ce cours

- a Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
- b Est difficile à suivre mais j'essaie
- c Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
- d Est trop élémentaire

### 5. Ce cours

- a Ne m'a donné aucune satisfaction
- b N'a aucun intérêt dans ma formation
- c Est une agréable curiosité
- d Je le recommande

### 6. L'enseignant

- a N'est pas pédagogue
- b Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- c Me parle
- d Se répète vraiment trop
- e Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut