

LOFO – Logique Formelle

EPITA – Document, ordinateur et calculatrice ne sont pas autorisés

Juin 2008 (1h30)

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

1 λ -calcul

Un λ -terme est une mot du langage suivant :

$$M ::= x \mid (\lambda x \cdot M) \mid (MM)$$

On rappelle les conventions suivantes :

- On omet les parenthèses extérieures
- L'application associe à gauche
- On peut grouper les abstractions imbriquées
- L'abstraction capture le plus possible à droite

$$\begin{aligned} MN &= (MN) \\ MNL &= (MN)L \\ \lambda xy \cdot M &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot M \\ \lambda x \cdot MN &= \lambda x \cdot (MN) \end{aligned}$$

Soit les deux combinateurs suivants :

$$\begin{aligned} Y &= \lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx)) && \text{(Combinateur de Curry)} \\ \Theta &= (\lambda xy \cdot y(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy)) && \text{(Combinateur de Turing)} \end{aligned}$$

1. Écrire Y et Θ en les parenthésant complètement.
2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de Y en utilisant les constructeurs `var`, `abs` et `app`, et les noms des variables pour feuilles.
3. Démontrer que ces combinateurs calculent les points fixes de fonction, c'est-à-dire que pour toute fonction g ,

$$g(Y g) = Y g \quad g(\Theta g) = \Theta g$$

4. Supposons l'existence :
 - d'un codage des entiers en λ -calcul ($\underline{0}$, $\underline{1}$ etc.)
 - de la fonction `pred` (`pred $\underline{n} = \underline{n-1}$` pour tout $n \geq 1$)
 - de la fonction `mult` (`mult $\underline{n} \underline{m} = \underline{n \times m}$`)
 - de la fonction `ifzero` (`ifzero $\underline{n} M N = M$ si $n = 0$, N sinon`)
 - de la fonction `fact` qui prend un entier \underline{n} et retourne $\underline{n!}$.En utilisant ces fonctions, écrire la définition récursive de `fact`.
5. Si f est une fonction récursive dont la valeur est M (i.e., le symbole f est lié à la valeur M , qui utilise le symbole f), on introduit $\overline{f} = \lambda f \cdot M$.
Montrer que $Y \overline{\text{fact}} \underline{n}$ calcule $\underline{n!}$.

2 λ -calcul Simplement Typé

Dérivations de type

Les dérivations de type sont construites à l'aide des nœuds suivants.

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \quad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \rightarrow \tau}$$

1. Donner une déduction de type pour $\lambda xyz \cdot y$.
2. Donner une déduction de type pour $\lambda xy \cdot xyx$.
3. Montrer que $\lambda xy \cdot yxy$ n'est pas typable.
4. Que pensez-vous de la typabilité de Y ?

3 Calcul des Séquents Classique

Calcul des Séquents Classiques

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \vdash \\ \frac{}{F \vdash F} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut} \\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash \neg \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \vdash \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} I \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r \wedge \vdash \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash I \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \vdash \\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow \vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow \vdash \end{array}$$

1. Prouver l'équivalence entre $A \wedge (B \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
2. Prouver l'équivalence entre $A \vee (B \wedge C)$ et $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
3. Vos preuves des questions 1 et 2 sont-elles intuitionnistes?
4. Prouver $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce).
5. Votre preuve est-elle intuitionniste?

4 Dédution Naturelle Intuitionniste

$$\begin{array}{c}
 [A] \\
 \vdots \\
 B \\
 \hline
 A \Rightarrow B \Rightarrow \mathcal{I}
 \end{array}
 \quad
 \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow \mathcal{E}
 \quad
 \frac{\perp}{A} \perp \mathcal{E}
 \quad
 \neg A := A \Rightarrow \perp$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathcal{I}
 \quad
 \frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathcal{E}
 \quad
 \frac{A \wedge B}{B} \wedge r \mathcal{E}$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee \mathcal{I}
 \quad
 \frac{B}{A \vee B} \vee r \mathcal{I}
 \quad
 \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee \mathcal{E}$$

1. Prouver l'équivalence entre $A \wedge (B \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
2. Prouver $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce).

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

1. Assiduité
 - a Jamais venu
 - b Presque jamais venu
 - c Souvent venu
 - d Toujours présent
2. Travail personnel
 - a Rien
 - b Bachotage récent
 - c Relu les notes entre chaque cours
 - d Fait les analess
 - e Lu d'autres sources
3. Ce cours
 - a Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
 - b Est difficile à suivre mais j'essaie
 - c Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
 - d Est trop élémentaire
4. Ce cours
 - a Ne m'a donné aucune satisfaction
 - b N'a aucun intérêt dans ma formation
 - c Est une agréable curiosité
 - d Je le recommande
5. L'enseignant

- a** N'est pas pédagogue
- b** Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- c** Me parle
- d** Se répète vraiment trop
- e** Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut