LOFO — Logique Formelle (Correction)

EPITA – **Document, ordinateur et calculatrice ne sont pas autorisés**

Juin 2009 (1h30)

Le sujet et sa correction ont été écrits par Akim Demaille.

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

1 λ-calcul : Entiers naturels de Barendregt

Un λ-terme $M \in \Lambda$ est un mot du langage suivant :

$$M \quad ::= \quad x \quad | \quad (\lambda x \cdot M) \quad | \quad (MM)$$

On rappelle les conventions suivantes :

- On omet les parenthèses extérieures $MN = (MN)$
- L'application associe à gauche $MNL = (MN)L$
- On peut grouper les abstractions imbriquées $\lambda xy \cdot M = \lambda x \cdot \lambda y \cdot M$
- L'abstraction capture le plus possible à droite $\lambda x \cdot MN = \lambda x \cdot (MN)$

Soit les combinateurs suivants :

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{I} & = & \lambda x \cdot x & \text{(Identité)} \\ \mathsf{T} & = & \lambda xy \cdot x & \text{(True)} \\ \mathsf{F} & = & \lambda xy \cdot y & \text{(False)} \end{array}$$

1. Écrire $\mathsf{T}MN$ complètement parenthésé.

Correction:

$$\mathsf{T}MN = (((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot x))M)N)$$

Barème:

2 Si le deuxième λ n'est pas montré.
4 Correct

2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de $\mathsf{T}MN$ en utilisant les constructeurs var, abs et app, et les noms des variables pour feuilles.

Barème:

2 Si les M et N sont marqués comme var.
4 Correct

3. **Paires.** Pour tout λ-terme M, N, on pose :

$$\langle M, N\rangle = \lambda z \cdot zMN$$

Calculer $\langle M, N\rangle\mathsf{T}$ et $\langle M, N\rangle\mathsf{F}$.

Correction:

$$\begin{array}{rcl} \langle M, N\rangle\mathsf{T} & = & (\lambda z \cdot zMN)\mathsf{T} \\ & = & \mathsf{T}MN \\ & = & (\lambda xy \cdot x)MN \\ & = & M \end{array}$$

et bien entendu $\langle M, N\rangle\mathsf{F} = N$. Nous avons donc déconstructions des paires.

4. **Entiers naturels.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $\ulcorner n \urcorner$ est défini inductivement comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner 0 \urcorner & = & \mathsf{I} \\ \ulcorner n+1 \urcorner & = & \langle \mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner\rangle \end{array}$$

Écrire $\ulcorner 3 \urcorner$ sans dérouler I, F et $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Correction:

$$\ulcorner 3 \urcorner = \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \mathsf{I}\rangle\rangle\rangle$$

Best-of:

$$\ulcorner 4 \urcorner = \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \mathsf{I}\rangle\rangle\rangle$$

5. Montrer l'existence d'une fonction succ telle que :

$$\mathsf{succ}\ulcorner n \urcorner = \ulcorner n+1 \urcorner$$

Correction:

$$\mathsf{succ} = \lambda x \cdot \langle \mathsf{F}, x\rangle$$

Barème:

2 si l'on donne succ n sans donner succ proprement dite.
3 si l'on donne succ sans prouver le résultat.

6. Montrer l'existence d'une fonction pred telle que :

$$\mathsf{pred}\ulcorner n+1 \urcorner = \ulcorner n \urcorner$$

Correction:

$$\mathsf{pred} = \lambda x \cdot x\mathsf{F}$$

puisque

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{pred}\ulcorner n+1 \urcorner & = & (\lambda x \cdot x\mathsf{F})\ulcorner n+1 \urcorner & \\ & = & \ulcorner n+1 \urcorner\mathsf{F} & \\ & = & \langle \mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner\rangle\mathsf{F} & \\ & = & \ulcorner n \urcorner & \text{cf. question 3} \end{array}$$

7. Montrer l'existence d'une fonction iszero telle que :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{iszero}\ulcorner 0 \urcorner & = & \mathsf{T} \\ \mathsf{iszero}\ulcorner n+1 \urcorner & = & \mathsf{F} \end{array}$$

Correction: Je voudrais d'abord présenter mes excuses pour l'erreur dans l'énoncé (qui parlait en fait de isnotzero puisqu'il envoyait 0 sur F et les non nuls sur T). Ceux qui ont fait l'exercice en ayant corrigé l'énoncé sont notés sur 100% à cette question, les autres sur 150% (réponse un peu plus difficile).

$$\mathsf{iszero} = \lambda x \cdot x\mathsf{T}$$

puisque

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{iszero}\ulcorner 0 \urcorner & = & (\lambda x \cdot x\mathsf{T})\ulcorner 0 \urcorner \\ & = & \ulcorner 0 \urcorner \mathsf{T} \\ & = & \mathsf{IT} \\ & = & \mathsf{T} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{iszero}\ulcorner n+1 \urcorner & = & (\lambda x \cdot x\mathsf{T})\ulcorner n+1 \urcorner \\ & = & \ulcorner n+1 \urcorner \mathsf{T} \\ & = & \langle \mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner \rangle \mathsf{T} \\ & = & \mathsf{F} \qquad \text{cf. question 3} \end{array}$$

Du coup, isnotzero = $(\lambda x \cdot x\mathsf{T})\mathsf{FT}$.

2 λ-calcul Simplement Typé

Dérivations de type

Les dérivation de type sont construites à l'aide des nœuds suivants.

$$\frac{M : \sigma \to \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \qquad \frac{\begin{array}{c}[x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau\end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \to \tau}$$

1. Donner une déduction de type pour $\lambda x \cdot \langle \mathsf{F}, x \rangle = \lambda x \cdot \lambda z \cdot z\mathsf{F}x$ en notant γ un type de F.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z : \gamma \to \sigma \to \tau \qquad F : \gamma}{zF : \sigma \to \tau}\text{app} \qquad x : \sigma}{zFx : \tau}\text{app}}{\lambda z \cdot zFx : (\gamma \to \sigma \to \tau) \to \tau}\text{abs}}{\lambda xz \cdot zFx : \sigma \to (\gamma \to \sigma \to \tau) \to \tau}\text{abs}$$

On reconnaît la fonction succ (item 5).

2. Donner un type pour $\ulcorner 1 \urcorner$.

Correction: $\ulcorner 1 \urcorner$ = succ$\ulcorner 0 \urcorner$ = succ I, ce qui, étant donné la question précédente, vaut $(\gamma \to \sigma \to \tau) \to \tau$ avec $\sigma = \delta \to \delta$, soit encore $(\gamma \to (\delta \to \delta) \to \tau) \to \tau$.

Best-of: $\ulcorner n \urcorner : \mathbb{N}$

3 Calcul des Séquents Classique

Calcul des Séquents Classiques

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X\vdash \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W\vdash \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C\vdash$$

$$\dfrac{}{F \vdash F} \text{Id} \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash\neg \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash\wedge \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} l\wedge\vdash \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r\wedge\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash l\vee \quad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r\vee \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow\vdash \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \vdash\Rightarrow$$

1. Prouver $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
2. Est-ce une théorème de logique intuitionniste ?

Best-of: « Oui (sans aucune conviction) »

3. Prouver $(A \Rightarrow B) \vee A$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B, A} \vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A} \vdash r\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A \Rightarrow B \vee A} \vdash l\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A} \vdash C$$

Best-of:

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash}{A \vdash B} \vdash W}{A \Rightarrow B}$$

4. Votre preuve est-elle intuitionniste ?

Correction: Non, certains des séquents ont deux formules à droite (e.g., $A \vdash A, B$). Et effectivement, il suffit de prendre $B = \bot$ pour voir pourquoi ce résultat n'est pas (prouvable en logique) intuitionniste.

4 Déduction Naturelle Intuitionniste

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\Rightarrow\mathcal{E} \qquad \dfrac{\bot}{A}\bot\mathcal{E} \qquad \neg A := A \Rightarrow \bot$$

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge l\mathcal{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\wedge r\mathcal{E}$$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\vee l\mathcal{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\vee r\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\vee\mathcal{E}$$

1. Prouver $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Correction: FIXME : Preuve à revoir, autre résultat.
Prouvons que $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \quad [B]^1}{A \wedge B}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \quad [C]^1}{A \wedge C}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}1$$

Montrons à présent la réciproque : $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.

$$\dfrac{\dfrac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A} \quad \dfrac{[A \wedge C]^1}{A}}{A}1 \quad \dfrac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{B}}{B \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge C]^2}{C}}{B \vee C}}{B \vee C}2}{A \wedge (B \vee C)}$$

2. Prouver $(A \Rightarrow B) \vee A$ (Loi de Peirce).

Correction: Cette formule n'est pas prouvable en logique intuitionniste, comme nous l'avons vu dans l'exercice précédent.

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

1. Assiduité

   a Jamais venu

   b Presque jamais venu

   c Souvent venu

   d Toujours présent

2. Travail personnel

   a Rien

   b Bachotage récent

   c Relu les notes entre chaque cours

   d Fait les anales

   e Lu d'autres sources

3. Ce cours

   a Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné

   b Est difficile à suivre mais j'essaie

   c Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc

   d Est trop élémentaire

4. Ce cours

   a Ne m'a donné aucune satisfaction

   b N'a aucun intérêt dans ma formation

   c Est une agréable curiosité

   d Je le recommande

5. L'enseignant

   a N'est pas pédagogue

   b Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau

   c Me parle

   d Se répète vraiment trop

   e Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut