

LOFO — Logique Formelle

EPITA – Document, ordinateur et calculatrice ne sont pas autorisés

Juin 2009 (1h30)

Une copie synthétique, bien orthographiée, avec un affichage clair des résultats, sera toujours mieux notée qu'une autre demandant une quelconque forme d'effort de la part du correcteur.

1 λ -calcul : Entiers naturels de Barendregt

Un λ -terme $M \in \Lambda$ est un mot du langage suivant :

$$M ::= x \mid (\lambda x \cdot M) \mid (MM)$$

On rappelle les conventions suivantes :

- On omet les parenthèses extérieures $MN = (MN)$
- L'application associe à gauche $MNL = (MN)L$
- On peut grouper les abstractions imbriquées $\lambda xy \cdot M = \lambda x \cdot \lambda y \cdot M$
- L'abstraction capture le plus possible à droite $\lambda x \cdot MN = \lambda x \cdot (MN)$

Soit les combinateurs suivants :

$$\begin{aligned} I &= \lambda x \cdot x && \text{(Identité)} \\ T &= \lambda xy \cdot x && \text{(True)} \\ F &= \lambda xy \cdot y && \text{(False)} \end{aligned}$$

1. Écrire TMN complètement parenthésé.
2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de TMN en utilisant les constructeurs `var`, `abs` et `app`, et les noms des variables pour feuilles.
3. **Paires.** Pour tout λ -terme M, N , on pose :

$$\langle M, N \rangle = \lambda z \cdot zMN$$

Calculer $\langle M, N \rangle T$ et $\langle M, N \rangle F$.

4. **Entiers naturels.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $\ulcorner n \urcorner$ est défini inductivement comme suit :

$$\begin{aligned} \ulcorner 0 \urcorner &= I \\ \ulcorner n + 1 \urcorner &= \langle F, \ulcorner n \urcorner \rangle \end{aligned}$$

Écrire $\ulcorner 3 \urcorner$ sans dérouler `I`, `F` et $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

5. Montrer l'existence d'une fonction succ telle que :

$$\text{succ} \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n + 1 \urcorner$$

6. Montrer l'existence d'une fonction pred telle que :

$$\text{pred} \ulcorner n + 1 \urcorner = \ulcorner n \urcorner$$

7. Montrer l'existence d'une fonction iszero telle que :

$$\begin{aligned} \text{iszero} \ulcorner 0 \urcorner &= \text{T} \\ \text{iszero} \ulcorner n + 1 \urcorner &= \text{F} \end{aligned}$$

2 λ-calcul Simplement Typé

Dérivations de type

Les dérivations de type sont construites à l'aide des nœuds suivants.

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \qquad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \rightarrow \tau}$$

1. Donner une déduction de type pour $\lambda x \cdot \langle F, x \rangle = \lambda x \cdot \lambda z \cdot zFx$ en notant γ un type de F.
2. Donner un type pour $\ulcorner 1 \urcorner$.

3 Calcul des Séquents Classique

Calcul des Séquents Classiques

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \vdash \\ \\ \frac{}{F \vdash F} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut} \\ \\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash \neg \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \vdash \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash \wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r \wedge \vdash \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \vdash \\ \\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow \vdash \end{array}$$

1. Prouver $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
2. Est-ce une théorème de logique intuitionniste ?
3. Prouver $(A \Rightarrow B) \vee A$.
4. Votre preuve est-elle intuitionniste ?

4 Dédution Naturelle Intuitionniste

$$\begin{array}{c}
 [A] \\
 \vdots \\
 B \\
 \hline
 A \Rightarrow B \Rightarrow I
 \end{array}
 \quad
 \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E
 \quad
 \frac{\perp}{A} \perp E
 \quad
 \neg A := A \Rightarrow \perp$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I
 \quad
 \frac{A \wedge B}{A} \wedge E
 \quad
 \frac{A \wedge B}{B} \wedge rE$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I
 \quad
 \frac{B}{A \vee B} \vee rI
 \quad
 \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee E$$

1. Prouver $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
2. Prouver $(A \Rightarrow B) \vee A$ (Loi de Peirce).

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

1. Assiduité
 - a Jamais venu
 - b Presque jamais venu
 - c Souvent venu
 - d Toujours présent
2. Travail personnel
 - a Rien
 - b Bachotage récent
 - c Relu les notes entre chaque cours
 - d Fait les anales
 - e Lu d'autres sources
3. Ce cours
 - a Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
 - b Est difficile à suivre mais j'essaie
 - c Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
 - d Est trop élémentaire
4. Ce cours
 - a Ne m'a donné aucune satisfaction
 - b N'a aucun intérêt dans ma formation

c Est une agréable curiosité

d Je le recommande

5. L'enseignant

a N'est pas pédagogue

b Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau

c Me parle

d Se répète vraiment trop

e Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut