LOFO — Logique Formelle (Correction)

EPITA – **Documents, ordinateurs et calculatrices sont interdits**

Juin 2010 (1h30)

1 λ-calcul : Entiers naturels de Barendregt

Un λ-terme $M \in \Lambda$ est un mot du langage suivant :

$$M \quad ::= \quad x \quad | \quad (\lambda x \cdot M) \quad | \quad (MM)$$

On rappelle les conventions syntaxiques suivantes :

- On omet les parenthèses extérieures $MN = (MN)$
- L'application associe à gauche $MNL = (MN)L$
- On peut grouper les abstractions imbriquées $\lambda xy \cdot M = \lambda x \cdot \lambda y \cdot M$
- L'abstraction capture le plus possible à droite $\lambda x \cdot MN = \lambda x \cdot (MN)$

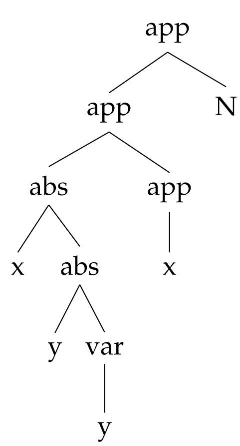
Q.1 Quelle équivalence est *fausse* ?

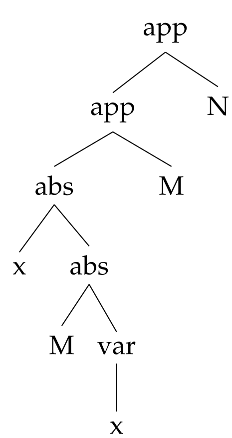
✗ $\lambda x \cdot x \equiv \lambda y \cdot y$
✗ $x \lambda x \cdot xx \equiv x \lambda y \cdot yy$
✓ $x \lambda x \cdot x \equiv y \lambda y \cdot y$
✗ $\lambda xy \cdot xy \equiv \lambda yx \cdot yx$

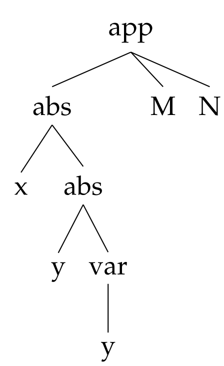
Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda nfx \cdot f(nfx)$.

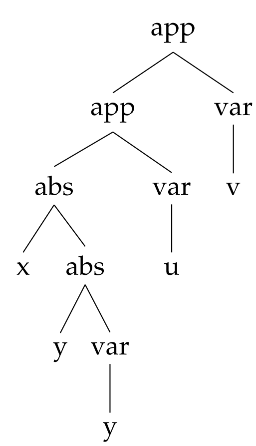
✓ $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot (f((nf)x)))))$
✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot (f((nf)x)))))$
✗ $(\lambda n \cdot)(\lambda f \cdot)\lambda x \cdot (f((nf)x))$
✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot f)))((nf)x))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?

✗


✗


✗


✓


Soit les combinateurs suivants :

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{I} & = & \lambda x \cdot x & \text{(Identity)} \\ \mathsf{T} & = & \lambda xy \cdot x & \text{(True)} \\ \mathsf{F} & = & \lambda xy \cdot y & \text{(False)} \end{array}$$

1. Écrire $\mathsf{F}MN$ sans utilisation de conventions syntaxiques, et complètement parenthésé.

Correction:

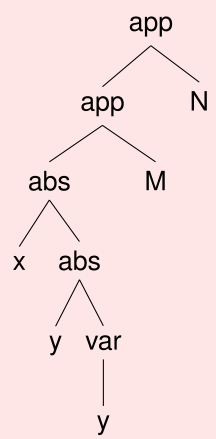
$$\mathsf{F}MN = (((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot y))M)N)$$

Barème:

2 Si le deuxième λ n'est pas montré.

4 Correct

2. Représentez l'arbre de syntaxe abstraite de $\mathsf{F}MN$ en utilisant les constructeurs var, abs et app, et les noms des variables pour feuilles.



Correction:

Barème:

2 Si les M et N sont marqués comme var.

4 Correct

3. **Paires.** Pour tout λ-terme M, N, on pose :

$$\langle M, N\rangle = \lambda z \cdot zMN$$

Calculez $\langle M, N\rangle\mathsf{T}$ et $\langle M, N\rangle\mathsf{F}$.

Correction:

$$\begin{array}{rcl} \langle M, N\rangle\mathsf{T} & = & (\lambda z \cdot zMN)\mathsf{T} \\ & = & \mathsf{T}MN \\ & = & (\lambda xy \cdot x)MN \\ & = & M \end{array}$$

et bien entendu $\langle M, N\rangle\mathsf{F} = N$. Nous disposons donc de déconstructeurs de paires.

4. **Entiers naturels.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $\ulcorner n \urcorner$ est défini inductivement comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner 0 \urcorner & = & \mathsf{I} \\ \ulcorner n+1 \urcorner & = & \langle \mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner \rangle \end{array}$$

Écrivez $\ulcorner 3 \urcorner$ sans dérouler I, F et $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Correction:

$$\ulcorner 3 \urcorner = \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \mathsf{I} \rangle\rangle\rangle$$

Barème:

2 $\langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle\rangle\rangle$
4 Correct

Best-of:

$$\begin{aligned} \ulcorner 4 \urcorner &= \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \langle \mathsf{F}, \mathsf{I} \rangle\rangle\rangle && (1) \\ \ulcorner 3 \urcorner &= \langle \mathsf{F}, \mathsf{F} m \mathsf{F}, \mathsf{I} \rangle && (2) \\ \ulcorner 3 \urcorner &= 4 && (3) \\ & && (4) \end{aligned}$$

Q.4 Quelle définition correspond à celle de la fonction succ telle que :

$$\mathsf{succ} \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n+1 \urcorner$$

✗ $\lambda x \cdot \mathsf{F}\langle x, n \rangle$ ✗ $\langle \lambda x \cdot \mathsf{F}, x \rangle$ ✗ $\langle \mathsf{F}, n \rangle$ ✓ $\lambda x \cdot \langle \mathsf{F}, x \rangle$

5. Montrez l'existence d'une fonction pred telle que :

$$\mathsf{pred} \ulcorner n+1 \urcorner = \ulcorner n \urcorner$$

Correction:

$$\mathsf{pred} = \lambda x \cdot x \mathsf{F}$$

puisque

$$\begin{aligned} \mathsf{pred} \ulcorner n+1 \urcorner &= (\lambda x \cdot x\mathsf{F}) \ulcorner n+1 \urcorner \\ &= \ulcorner n+1 \urcorner \mathsf{F} \\ &= \langle \mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner \rangle \mathsf{F} \\ &= \ulcorner n \urcorner \qquad \text{cf. question 3} \end{aligned}$$

Barème:

2 Bon résultat, pas de preuve.

Best-of:

$$\mathsf{pred} \ulcorner n+1 \urcorner = \ulcorner n \urcorner$$

2 λ-calcul Simplement Typé

Dérivations de type
Les dérivation de type sont construites à l'aide des nœuds suivants.

$$\frac{M : \sigma \to \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \qquad \frac{\begin{array}{c}[x:\sigma] \\ \vdots \\ M : \tau\end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \to \tau}$$

1. Donnez une déduction de type pour $\lambda x \cdot \langle \mathsf{F}, x\rangle = \lambda x \cdot \lambda z \cdot z\mathsf{F}x$ en notant γ un type de F.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z : \gamma \to \sigma \to \tau \qquad F : \gamma}{zF : \sigma \to \tau}\,\text{app} \qquad x : \sigma}{zFx : \tau}\,\text{app}}{\lambda z \cdot zFx : (\gamma \to \sigma \to \tau) \to \tau}\,\text{abs}}{\lambda xz \cdot zFx : \sigma \to (\gamma \to \sigma \to \tau) \to \tau}\,\text{abs}$$

On reconnaît la fonction succ (item 4).

Q.5 Donnez un type pour $\ulcorner 1 \urcorner$.

✗ $(\tau \to (\delta \to \delta) \to \tau) \to \tau$ ✗ $(\tau \to (\delta \to \delta) \to \delta) \to \tau$
✓ $(\gamma \to (\delta \to \delta) \to \tau) \to \tau$ ✗ $(\delta \to (\delta \to \delta) \to \tau) \to \tau$

Correction: $\ulcorner 1 \urcorner = \mathsf{succ}\ulcorner 0 \urcorner = \mathsf{succ}\,\mathsf{I}$, ce qui, étant donné la question précédente, vaut $(\gamma \to \sigma \to \tau) \to \tau$ avec $\sigma = \delta \to \delta$, soit encore $(\gamma \to (\delta \to \delta) \to \tau) \to \tau$.

3 Calcul des Séquents Classique

Calcul des Séquents Classiques

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)}\,\vdash\!X \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\,X\!\vdash \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,\vdash\!W \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,W\!\vdash \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,\vdash\!C \qquad \dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,C\!\vdash$$

$$\dfrac{}{F \vdash F}\,\text{Id} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\text{Cut}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\vdash\!\neg \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\neg\!\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,\vdash\!\wedge \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,l\!\wedge\!\vdash \qquad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,r\!\wedge\!\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\vdash\!l\vee \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\vdash\!r\vee \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee\!\vdash$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}\,\Rightarrow\!\vdash \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\,\vdash\!\Rightarrow$$

Q.6 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce) ?

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A}\,\vdash\Rightarrow \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\,\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\,\vdash\Rightarrow$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\,\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\,\vdash C \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\,\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\,\vdash\Rightarrow$$

✓ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash A, B}\,\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\,\vdash\Rightarrow \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A}\,\Rightarrow\vdash}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\,\vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\,\vdash\Rightarrow$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\,\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\,\vdash C \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A}\,\vdash\Rightarrow}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\,\vdash\Rightarrow$$

1. Prouver $(A \Rightarrow B) \vee A$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B, A}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A}\vdash r\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A \Rightarrow B \vee A}\vdash l\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A}\vdash C$$

Best-of:

- $$\dfrac{\dfrac{A \vdash}{A \vdash B}\vdash W}{A \Rightarrow B}$$
- $$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A} C\vdash}{(A \Rightarrow B) \vee A}\vdash r\vee$$

2. Votre preuve est-elle intuitionniste ?

Correction: Non, certains des séquents ont deux formules à droite (e.g., $A \vdash A, B$). Et effectivement, il suffit de prendre $B = \bot$ pour voir pourquoi ce résultat n'est pas (prouvable en logique) intuitionniste.

Barème:

1 de charité quand le résultat est donné sans explication.

Best-of:

- $A \Rightarrow B$ est faux ssi A est vrai (et B est faux) donc on a bien intuitivement $(A \Rightarrow B) \vee A$.
- Oui, car aucun mot du langage n'apparait dans les hypothéses
- Preuve $\neg$ intuitionniste

4 Déduction Naturelle Intuitionniste

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\Rightarrow\mathcal{E} \qquad \dfrac{\bot}{A}\bot\mathcal{E} \qquad \neg A := A \Rightarrow \bot$$

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge l\mathcal{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\wedge r\mathcal{E}$$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\vee l\mathcal{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\vee r\mathcal{I} \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\vee\mathcal{E}$$

1. Prouver $A \land (B \lor C) \vdash (A \land B) \lor (A \land C)$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{A \land (B \lor C)}{B \lor C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \land (B \lor C)}{A} \quad [B]^1}{A \land B}}{(A \land B) \lor (A \land C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \land (B \lor C)}{A} \quad [C]^1}{A \land C}}{(A \land B) \lor (A \land C)}}{(A \land B) \lor (A \land C)}\,1$$

2. Prouver $(A \land B) \lor (A \land C) \vdash A \land (B \lor C)$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{(A \land B) \lor (A \land C) \quad \dfrac{[A \land B]^1}{A} \quad \dfrac{[A \land C]^1}{A}}{A}\,1 \quad \dfrac{(A \land B) \lor (A \land C) \quad \dfrac{\dfrac{[A \land B]^2}{B}}{B \lor C} \quad \dfrac{\dfrac{[A \land C]^2}{C}}{B \lor C}}{B \lor C}\,2}{A \land (B \lor C)}$$

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.7 Assiduité

✗ Jamais venu
✗ Presque jamais venu
✗ Souvent venu
✗ Toujours présent

Q.8 Prises de notes

✗ Aucune
✗ Sur papier
✗ Sur ordinateur à clavier
✗ Sur ardoise
✗ Sur le journal du jour

Q.9 Travail personnel

✗ Rien
✗ Bachotage récent
✗ Relu les notes entre chaque cours
✗ Fait les anales
✗ Lu d'autres sources

Q.10 Ce cours

✗ Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
✗ Est difficile à suivre mais j'essaie
✗ Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
✗ Est trop élémentaire

Q.11 Ce cours

✗ Ne m'a donné aucune satisfaction
✗ N'a aucun intérêt dans ma formation
✗ Est une agréable curiosité
✗ Est nécessaire mais pas intéressant
✗ Je le recommande

Q.12 L'enseignant

- ✗ N'est pas pédagogue
- ✗ Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- ✗ Me parle
- ✗ Se répète vraiment trop
- ✗ Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut