

LOFO — Logique Formelle

EPITA – Documents, ordinateurs et calculatrices sont interdits

Juin 2010 (1h30)

1 λ -calcul : Entiers naturels de Barendregt

Un λ -terme $M \in \Lambda$ est un mot du langage suivant :

$$M ::= x \mid (\lambda x \cdot M) \mid (MM)$$

On rappelle les conventions syntaxiques suivantes :

- On omet les parenthèses extérieures $MN = (MN)$
- L'application associe à gauche $MNL = (MN)L$
- On peut grouper les abstractions imbriquées $\lambda xy \cdot M = \lambda x \cdot \lambda y \cdot M$
- L'abstraction capture le plus possible à droite $\lambda x \cdot MN = \lambda x \cdot (MN)$

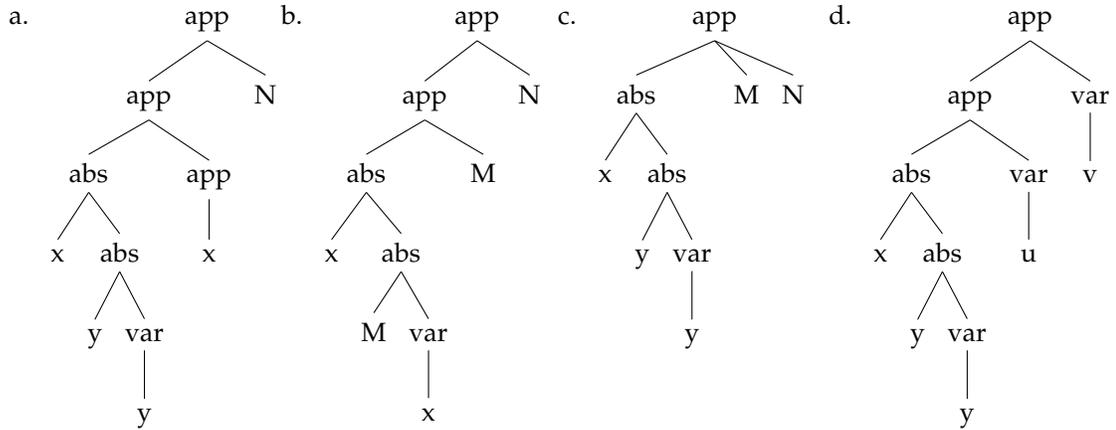
Q.1 Quelle équivalence est *fausse* ?

- | | |
|---|---|
| a. $\lambda x \cdot x \equiv \lambda y \cdot y$ | c. $x\lambda x \cdot x \equiv y\lambda y \cdot y$ |
| b. $x\lambda x \cdot xx \equiv x\lambda y \cdot yy$ | d. $\lambda xy \cdot xy \equiv \lambda yx \cdot yx$ |

Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda nfx \cdot f(nfx)$.

- | | |
|--|--|
| a. $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot (f((nf)x))))))$ | c. $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot) \lambda x \cdot (f((nf)x))$ |
| b. $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot (f((nf)x))))))$ | d. $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot f)))(nf)x$ |

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?



Soit les combinateurs suivants :

- I = $\lambda x \cdot x$ (Identity)
- T = $\lambda xy \cdot x$ (True)
- F = $\lambda xy \cdot y$ (False)

1. Écrire FMN sans utilisation de conventions syntaxiques, et complètement parenthésé.
2. Représentez l'arbre de syntaxe abstraite de FMN en utilisant les constructeurs `var`, `abs` et `app`, et les noms des variables pour feuilles.
3. **Paires.** Pour tout λ -terme M, N , on pose :

$$\langle M, N \rangle = \lambda z \cdot zMN$$

Calculez $\langle M, N \rangle T$ et $\langle M, N \rangle F$.

4. **Entiers naturels.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $\ulcorner n \urcorner$ est défini inductivement comme suit :

$$\begin{aligned} \ulcorner 0 \urcorner &= I \\ \ulcorner n + 1 \urcorner &= \langle F, \ulcorner n \urcorner \rangle \end{aligned}$$

Écrivez $\ulcorner 3 \urcorner$ sans dérouler I, F et $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q.4 Quelle définition correspond à celle de la fonction `succ` telle que :

$$\text{succ} \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n + 1 \urcorner$$

- a. $\lambda x \cdot F \langle x, n \rangle$
- b. $\langle \lambda x \cdot F, x \rangle$
- c. $\langle F, n \rangle$
- d. $\lambda x \cdot \langle F, x \rangle$

5. Montrez l'existence d'une fonction `pred` telle que :

$$\text{pred} \ulcorner n + 1 \urcorner = \ulcorner n \urcorner$$

2 λ -calcul Simplement Typé

Dérivations de type

Les dérivations de type sont construites à l'aide des nœuds suivants.

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \qquad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x \cdot M : \sigma \rightarrow \tau}$$

1. Donnez une déduction de type pour $\lambda x \cdot \langle F, x \rangle = \lambda x \cdot \lambda z \cdot zFx$ en notant γ un type de F .

Q.5 Donnez un type pour $\ulcorner 1 \urcorner$.

- a. $(\tau \rightarrow (\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \tau) \rightarrow \tau$ c. $(\tau \rightarrow (\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \delta) \rightarrow \tau$
 b. $(\gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \tau) \rightarrow \tau$ d. $(\delta \rightarrow (\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \tau) \rightarrow \tau$

3 Calcul des Séquents Classique

Calcul des Séquents Classiques

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \vdash \\ \\ \frac{}{F \vdash F} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut} \\ \\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash \neg \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \vdash \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash \wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} I \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r \wedge \vdash \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \vdash \\ \\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \vdash \Rightarrow \end{array}$$

Q.6 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce)?

$$\begin{array}{c} \text{a. } \frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \overline{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \Rightarrow \vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \Rightarrow \vdash \\ \\ \text{b. } \frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \overline{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A} \vdash C}{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash W \quad \frac{A \vdash A, B}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \overline{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A} \vdash C}{\frac{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow} \vdash \Rightarrow \\ \\ \text{c. } \frac{\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B} \vdash X \quad \overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash C \quad \overline{A \vdash A}}{\frac{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow} \vdash \Rightarrow \\ \\ \text{d. } \frac{\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B} \vdash X \quad \overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash C \quad \overline{A \vdash A}}{\frac{\vdash A \Rightarrow B}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow} \vdash \Rightarrow \end{array}$$

1. Prouver $(A \Rightarrow B) \vee A$.
 2. Votre preuve est-elle intuitionniste?

4 Dédution Naturelle Intuitionniste

$$\begin{array}{c}
 [A] \\
 \vdots \\
 B \\
 \hline
 A \Rightarrow B \Rightarrow I
 \end{array}
 \quad
 \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E
 \quad
 \frac{\perp}{A} \perp E
 \quad
 \neg A := A \Rightarrow \perp$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I
 \quad
 \frac{A \wedge B}{A} \wedge E
 \quad
 \frac{A \wedge B}{B} \wedge rE$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I
 \quad
 \frac{B}{A \vee B} \vee rI
 \quad
 \frac{
 \begin{array}{c}
 [A] \quad [B] \\
 \vdots \quad \vdots \\
 C \quad C
 \end{array}
 }{C} \vee E$$

1. Prouver $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
2. Prouver $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m’engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d’avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.7 Assiduité

- | | | |
|-------------------|-----------------|---------------------|
| a. Jamais venu | venu | d. Toujours présent |
| b. Presque jamais | c. Souvent venu | |

Q.8 Prises de notes

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| a. Aucune | d. Sur ardoise |
| b. Sur papier | e. Sur le journal du jour |
| c. Sur ordinateur à clavier | |

Q.9 Travail personnel

- | | |
|--------------------------------------|------------------------|
| a. Rien | d. Fait les anaales |
| b. Bachotage récent | e. Lu d’autres sources |
| c. Relu les notes entre chaque cours | |

Q.10 Ce cours

- | | |
|--|---|
| a. Est incompréhensible et j’ai rapidement abandonné | c. Est facile à suivre une fois qu’on a compris le truc |
| b. Est difficile à suivre mais j’essaie | d. Est trop élémentaire |

Q.11 Ce cours

- | | |
|--|--|
| a. Ne m’a donné aucune satisfaction | d. Est nécessaire mais pas intéressant |
| b. N’a aucun intérêt dans ma formation | e. Je le recommande |
| c. Est une agréable curiosité | |

Q.12 L'enseignant

- a. N'est pas pédagogue
- b. Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- c. Me parle
- d. Se répète vraiment trop
- e. Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut