LOFO — Logique Formelle (Correction)

EPITA – **Documents, ordinateurs et calculatrices sont interdits**

Juin 2011 (1h30)

Bien lire les questions, chaque mot est important. Écrire court, juste, et bien. Une argumentation informelle mais convaincante est souvent suffisante.

Répondre aux questions à choix multiples (numérotées Q.1, Q.2 etc.) sur les formulaires de QCM ; aucune réponse manuscrite ne sera corrigée. Renseigner les champs d'identité. Il y a exactement une et une seule réponse juste pour ces questions. Si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive. Par exemple s'il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négatif*, cocher *nul* qui est plus restrictif que *positif* et *négatif*, tous deux vrais. Répondre incorrectement est plus pénalisé que de ne pas répondre.

1 λ-Calcul

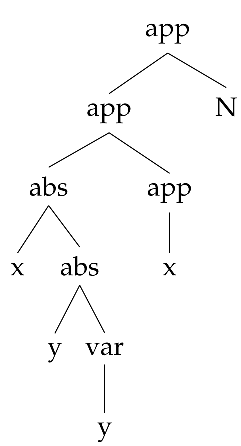
Q.1 Quelle équivalence est *fausse* ?

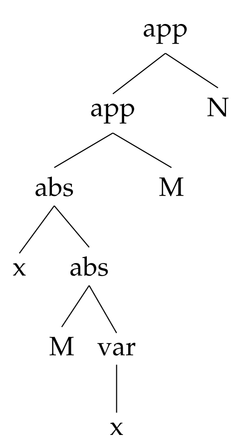
✗ $\lambda x \cdot x \equiv \lambda y \cdot y$
✓ $x\lambda x \cdot x \equiv y\lambda y \cdot y$
✗ $x\lambda x \cdot xx \equiv x\lambda y \cdot yy$
✗ $\lambda xy \cdot xy \equiv \lambda yx \cdot yx$

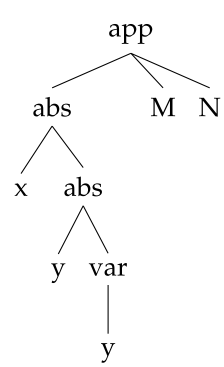
Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda nfx \cdot f(nfx)$.

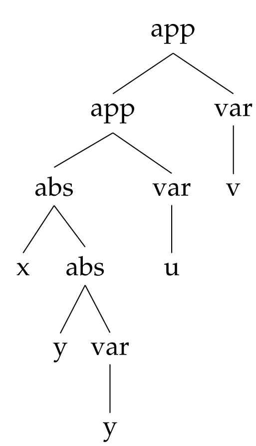
✓ $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot (f((nf)x)))))$
✗ $(\lambda n\cdot)(\lambda f\cdot)\lambda x \cdot (f((nf)x))$
✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot (f((nf)x)))))$
✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot f)))((nf)x))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?

✗ 

✗ 

✗ 

✓ 

Soit le combinateur suivant :

$$\mathsf{Y} = \lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx)) \quad \text{(Combinateur de Curry)}$$

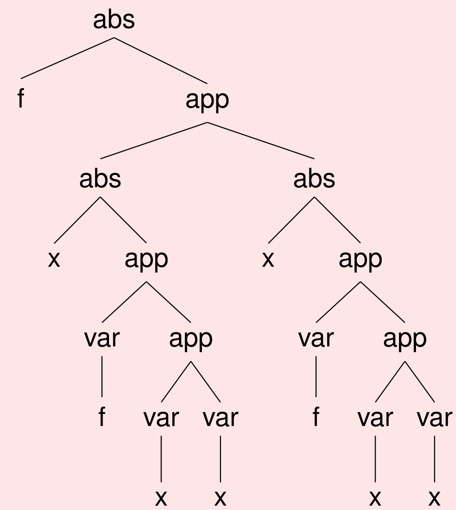
1. Écrire Y en le parenthésant complètement.

Correction:

$$\mathsf{Y} = \lambda f \cdot ((\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx)))$$

2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de Y en utilisant les constructeurs var, abs et app, et les noms des variables pour feuilles.

Correction:



3. Prouver que Y est un opérateur de point-fixe en démontrant que pour toute λ-fonction g on a $\mathsf{Y}g \underset{\beta}{=} g(\mathsf{Y}g)$.

Correction:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Y}\ g & = & (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx)))\ g \\ & \to_\beta & (\lambda x \cdot g(xx))(\lambda x \cdot g(xx)) \\ & \to_\beta & g((\lambda x \cdot g(xx))(\lambda x \cdot g(xx))) \\ & \leftarrow_\beta & g(\lambda f \cdot ((\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx)))g) \\ & = & g(\mathsf{Y}\ g) \end{array}$$

2 λ-Calcul Simplement Typé

Q.4 Tout λ-terme est typable. . .

✗ vrai ✓ faux

Q.5 Tout λ-terme qui admet un type simple est. . .

✗ non nécessairement normalisable ✓ fortement normalisable
✗ faiblement normalisable ✗ normalisé

Q.6 Quel type admet $\lambda xy \cdot x$.

✓ $\sigma \to \tau \to \sigma$ ✗ $\sigma \to \sigma \to \sigma$ ✗ $(\sigma \to \tau) \to \sigma$ ✗ $\sigma \to \bot \to \sigma$

Correction: La réponse (b) n'est pas fausse, mais elle est moins générale que la réponse (a), qui est donc celle à cocher.

$$\dfrac{\dfrac{[x : \sigma]^{(1)}}{\lambda y \cdot x : \tau \to \sigma}}{\lambda xy \cdot x : \sigma \to \tau \to \sigma}\ (1)$$

3 Calcul des Séquents Classique

Q.7 Pour toute preuve avec coupures. . .

✗ il n'existe pas nécessaire de preuve équivalente sans coupure
✗ il existe une preuve sans coupure
✗ elle peut être normalisée en une preuve sans coupure
✓ elle peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux

Q.8 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce) ?

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✓ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash A, B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A}\Rightarrow\vdash}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\Rightarrow\vdash}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

Q.9 Quelle déduction prouve $(A \Rightarrow B) \lor A$?

✓ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B, A}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B \lor A, A}\vdash l\lor}{\vdash A \Rightarrow B \lor A, A \Rightarrow B \lor A}\vdash r\lor}{\vdash A \Rightarrow B \lor A}\vdash C$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{B \vdash A, B}\vdash W}{A \Rightarrow B \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash A \Rightarrow B \lor A}\vdash r\lor$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A}C\vdash}{\vdash (A \Rightarrow B) \lor A}\vdash r\lor$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash}{A \vdash B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B}}{\vdash (A \Rightarrow B) \lor A}\vdash \lor r$$

Q.10 Cette preuve est-elle intuitionniste ?

✗ Non, elle part du tiers-exclus.
✓ Non, certains des séquents ont deux formules à droite.
✗ Oui, $A \Rightarrow B$ est faux ssi A est vrai (et B est faux) donc on a bien intuitivement $(A \Rightarrow B) \lor A$.
✗ Oui, car aucun mot du langage n'apparaît dans les hypothéses.

Correction: Non, certains des séquents ont deux formules à droite (e.g., $A \vdash A, B$). Et effectivement, il suffit de prendre $B = \bot$ pour voir pourquoi ce résultat n'est pas (prouvable en logique) intuitionniste.
Ça vous amusera peut-être d'apprendre que les propositions incorrectes sont tirées des best-ofs des années précédentes.

1. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A, B \Rightarrow \bot \vdash A}\,W\vdash \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B} \quad \dfrac{}{\bot \vdash A}}{B, B \Rightarrow \bot \vdash A}\,\Rightarrow\vdash}{A \vee B, B \Rightarrow \bot \vdash A}\,\vee\vdash$$

2. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation classique.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A, \neg B \vdash A}\,W\vdash \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{B \vdash B, A}\,\vdash W}{B, \neg B \vdash A}\,\vdash\neg}{A \vee B, \neg B \vdash A}\,\vee\vdash$$

4 Déduction Naturelle Intuitionniste

Q.11 Quelle preuve de $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ est valide ?

✓ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\,\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\,\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\,\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\,\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_{1,2}$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A \quad B}\,\wedge r\mathcal{E}}{B \quad A}\,X}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\,\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\,\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_2}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

1. Prouver $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \quad [B]^1}{A \wedge B}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \quad [C]^1}{A \wedge C}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,1$$

2. Prouver $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A} \quad \dfrac{[A \wedge C]^1}{A}}{A}\,1 \qquad \dfrac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{B}}{B \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge C]^2}{C}}{B \vee C}}{B \vee C}\,2}{A \wedge (B \vee C)}$$

3. Prouver $\neg A \vee A$.

Correction: Il est bien entendu impossible de démontrer le tiers exclus en logique intuitionniste. Les résultats ont été incroyablement décevants sur cette question : 5 réponses (à peu près) correctes sur 48 copies.

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.12 Assiduité

- ✗ Jamais venu
- ✗ Presque jamais venu
- ✗ Souvent venu
- ✗ Toujours présent

Q.13 Prises de notes

- ✗ Aucune
- ✗ Sur papier
- ✗ Sur ordinateur à clavier
- ✗ Sur ardoise
- ✗ Sur le journal du jour

Q.14 Travail personnel

- ✗ Rien
- ✗ Bachotage récent
- ✗ Relu les notes entre chaque cours
- ✗ Fait les anales
- ✗ Lu d'autres sources

Q.15 Ce cours

- ✗ Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
- ✗ Est difficile à suivre mais j'essaie
- ✗ Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
- ✗ Est trop élémentaire

Q.16 Ce cours

- ✗ Ne m'a donné aucune satisfaction
- ✗ N'a aucun intérêt dans ma formation
- ✗ Est une agréable curiosité
- ✗ Est nécessaire mais pas intéressant
- ✗ Je le recommande

Q.17 L'enseignant

- ✗ N'est pas pédagogue
- ✗ Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- ✗ Me parle
- ✗ Se répète vraiment trop
- ✗ Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut