LOFO — Logique Formelle

EPITA – **Documents, ordinateurs et calculatrices sont interdits**

Juin 2011 (1h30)

Bien lire les questions, chaque mot est important. Écrire court, juste, et bien. Une argumentation informelle mais convaincante est souvent suffisante.

Répondre aux questions à choix multiples (numérotées Q.1, Q.2 etc.) sur les formulaires de QCM ; aucune réponse manuscrite ne sera corrigée. Renseigner les champs d'identité. Il y a exactement une et une seule réponse juste pour ces questions. Si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive. Par exemple s'il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négatif*, cocher *nul* qui est plus restrictif que *positif* et *négatif*, tous deux vrais. Répondre incorrectement est plus pénalisé que de ne pas répondre.

1 λ-Calcul

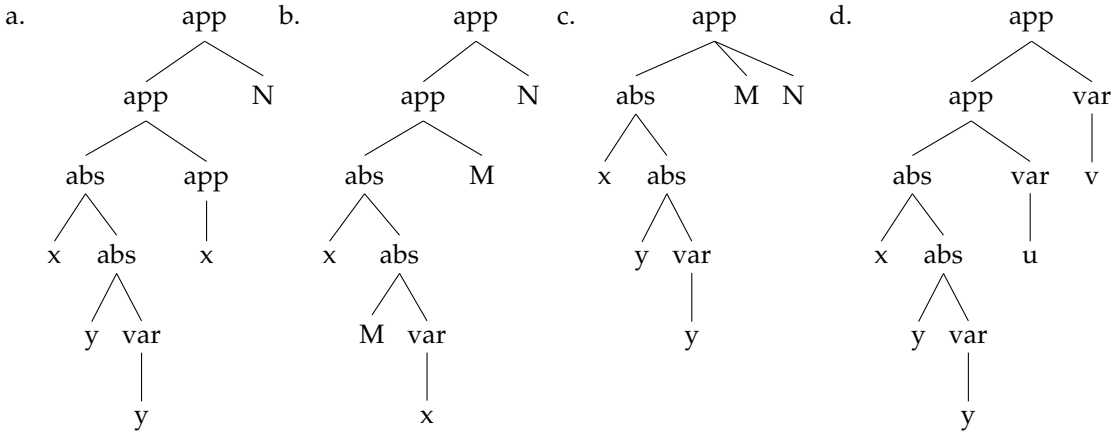
Q.1 Quelle équivalence est *fausse* ?

a. $\lambda x \cdot x \equiv \lambda y \cdot y$
b. $x\lambda x \cdot xx \equiv x\lambda y \cdot yy$
c. $x\lambda x \cdot x \equiv y\lambda y \cdot y$
d. $\lambda xy \cdot xy \equiv \lambda yx \cdot yx$

Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda nfx \cdot f(nfx)$.

a. $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot (f((nf)x)))))$
b. $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot (f((nf)x)))))$
c. $(\lambda n \cdot)(\lambda f \cdot)\lambda x \cdot (f((nf)x))$
d. $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot f)))((nf)x))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?



Soit le combinateur suivant :

$$\mathsf{Y} \quad = \quad \lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx)) \quad \text{(Combinateur de Curry)}$$

1. Écrire Y en le parenthésant complètement.
2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de Y en utilisant les constructeurs var, abs et app, et les noms des variables pour feuilles.

3. Prouver que Y est un opérateur de point-fixe en démontrant que pour toute λ-fonction g on a $\mathsf{Y}g \underset{\beta}{=} g(\mathsf{Y}g)$.

2 λ-Calcul Simplement Typé

Q.4 Tout λ-terme est typable...

a. vrai b. faux

Q.5 Tout λ-terme qui admet un type simple est...

a. non nécessairement normalisable
b. faiblement normalisable
c. fortement normalisable
d. normalisé

Q.6 Quel type admet $\lambda xy \cdot x$.

a. $\sigma \to \tau \to \sigma$ b. $\sigma \to \sigma \to \sigma$ c. $(\sigma \to \tau) \to \sigma$ d. $\sigma \to \bot \to \sigma$

3 Calcul des Séquents Classique

Q.7 Pour toute preuve avec coupures...

a. il n'existe pas nécessaire de preuve équivalente sans coupure
b. il existe une preuve sans coupure
c. elle peut être normalisée en une preuve sans coupure
d. elle peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux

Q.8 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce) ?

a.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \quad \overline{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

c.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash A, B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \quad \overline{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A}\Rightarrow\vdash}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

b.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \quad \overline{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

d.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash A} \quad \overline{B \vdash B}}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\Rightarrow\vdash}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \quad \dfrac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

Q.9 Quelle déduction prouve $(A \Rightarrow B) \vee A$?

a.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B, A}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A}\vdash l\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A \Rightarrow B \vee A}\vdash r\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A}\vdash C$$

b.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash}{A \vdash B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B}}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A}\vdash \vee r$$

c.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{B \vdash A, B}\vdash W}{A \Rightarrow B \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash A \Rightarrow B \vee A}\vdash r\vee$$

d.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A}C\vdash}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A}\vdash r\vee}{}$$

Q.10 Cette preuve est-elle intuitionniste ?

a. Non, elle part du tiers-exclus.
b. Non, certains des séquents ont deux formules à droite.
c. Oui, $A \Rightarrow B$ est faux ssi A est vrai (et B est faux) donc on a bien intuitivement $(A \Rightarrow B) \vee A$.
d. Oui, car aucun mot du langage n'apparaît dans les hypothéses.

1. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.
2. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation classique.

4 Déduction Naturelle Intuitionniste

Q.11 Quelle preuve de $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ est valide ?

a.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

b.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A \quad B}\wedge r\mathcal{E}}{B \quad A}X}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

c.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_{1,2}$$

d.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_2}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

1. Prouver $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
2. Prouver $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.
3. Prouver $\neg A \vee A$.

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.12 Assiduité

a. Jamais venu
b. Presque jamais venu
c. Souvent venu
d. Toujours présent

Q.13 Prises de notes

a. Aucune
b. Sur papier
c. Sur ordinateur à clavier
d. Sur ardoise
e. Sur le journal du jour

Q.14 Travail personnel

a. Rien
b. Bachotage récent
c. Relu les notes entre chaque cours
d. Fait les anales
e. Lu d'autres sources

Q.15 Ce cours

a. Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
b. Est difficile à suivre mais j'essaie
c. Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
d. Est trop élémentaire

Q.16 Ce cours

a. Ne m'a donné aucune satisfaction
b. N'a aucun intérêt dans ma formation
c. Est une agréable curiosité
d. Est nécessaire mais pas intéressant
e. Je le recommande

Q.17 L'enseignant

a. N'est pas pédagogue
b. Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
c. Me parle
d. Se répète vraiment trop
e. Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut