LOFO — Logique Formelle (Correction)

EPITA – **Documents, ordinateurs et calculatrices sont interdits**

Juin 2012 (1h30)

Bien lire les questions, chaque mot est important. Écrire court, juste, et bien. Une argumentation informelle mais convaincante est souvent suffisante.

Pour les questions à choix multiples (numérotées Q.1, Q.2 etc.) aucune réponse manuscrite ne sera corrigée : répondre sur les formulaires. Renseigner les champs d'identité. Il y a exactement une et une seule réponse juste pour ces questions. Si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive. Par exemple s'il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négatif*, cocher *nul* qui est plus restrictif que *positif* et *négatif*, tous deux vrais. Répondre incorrectement est plus pénalisé que de ne pas répondre.

1 λ-Calcul

Q.1 Quelle équivalence est *fausse* ?

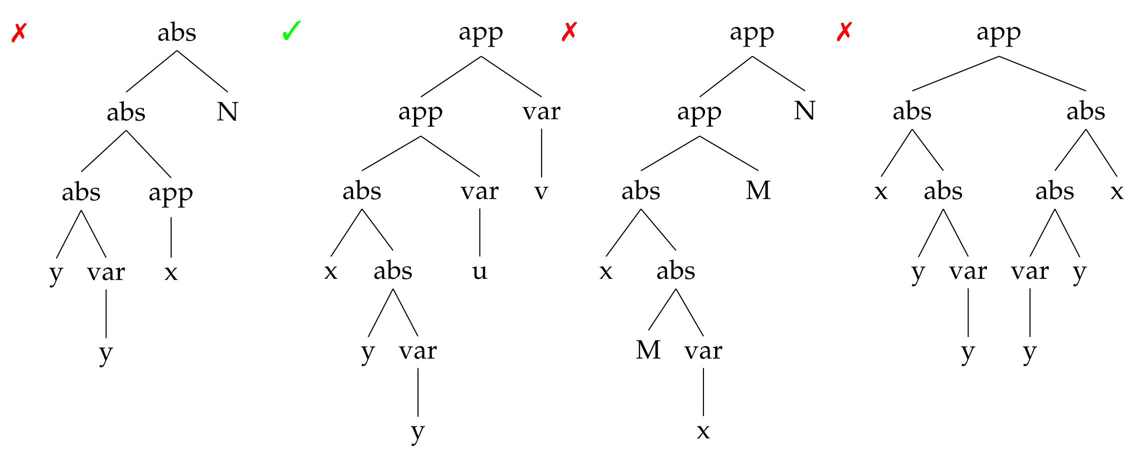
- ✗ $x\lambda x \cdot xxx \equiv x\lambda y \cdot (yy)y$
- ✗ $x\lambda x \cdot xx \equiv x(\lambda y \cdot yy)$
- ✓ $x\lambda x \cdot xxx \equiv x\lambda y \cdot y(yy)$
- ✗ $\lambda xy \cdot xy \equiv \lambda ab \cdot ab$

Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda nfx \cdot f(nfx)$.

- ✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot (f((nf)x)))))$
- ✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot f)))((nf)x))$
- ✓ $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot (f((nf)x)))))$
- ✗ $(\lambda n \cdot)(\lambda f \cdot)\lambda x \cdot (f((nf)x))$

Best-of:
- $((\lambda x).(\lambda y).(y(xx)y))((\lambda x).(\lambda y).(y(xx)y))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?



Soit le combinateur suivant :

$$\Theta = (\lambda xy \cdot y(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy)) \quad \text{(Combinateur de Turing)}$$

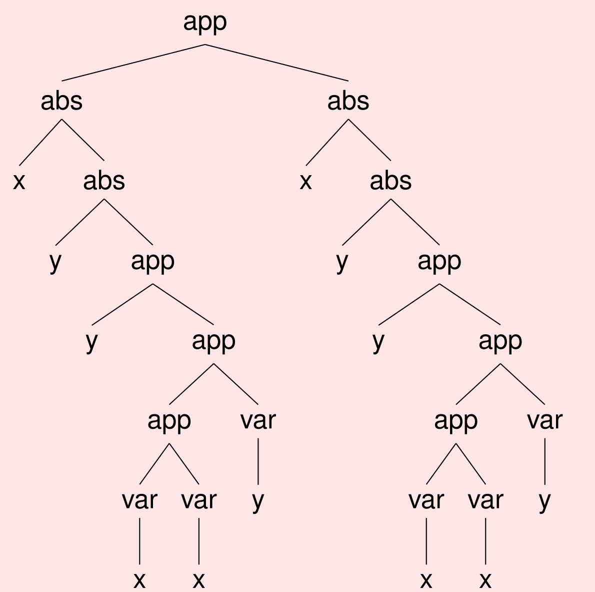
1. Écrire Θ en le parenthésant complètement.

Correction:

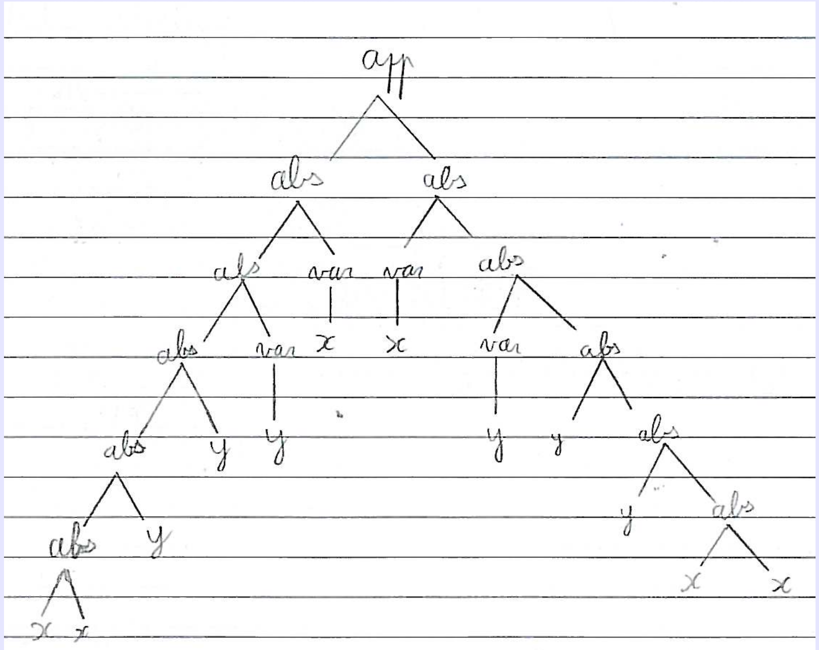
$$\Theta \quad = \quad \Big(\lambda x \cdot \Big(\lambda y \cdot (y((xx)y))\Big)\Big)\Big(\lambda x \cdot \Big(\lambda y \cdot (y((xx)y))\Big)\Big) \tag{1}$$

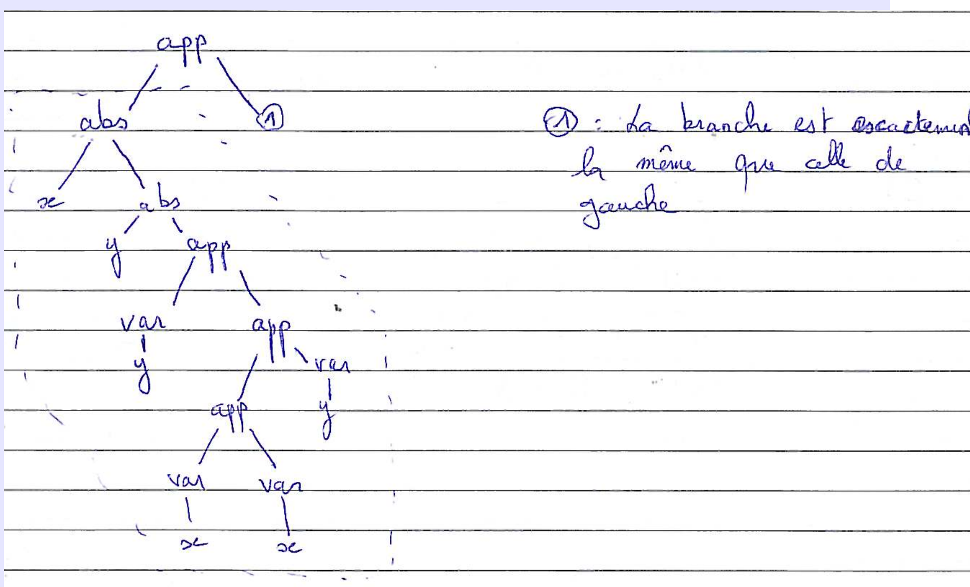
2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de Θ en utilisant les constructeurs var, abs et app, et les noms des variables pour feuilles.

Correction:



Best-of:

- 

- 

3. Prouver que Θ est un opérateur de point fixe en démontrant que pour toute λ-fonction g on a $\Theta g \underset{\beta}{=} g(\Theta g)$.

Correction: Posons $\theta = \lambda xy \cdot y((xx)y)$, i.e., $\Theta = \theta\theta$. Alors

$$
\begin{array}{rcl}
\Theta\ g & = & (\theta\theta)g \\
 & = & (\lambda xy \cdot y((xx)y)\ \theta)\ g \\
 & \to_\beta & \lambda y \cdot y((\theta\theta)y)\ g \\
 & \to_\beta & g((\theta\theta)g) \\
 & = & g(\Theta\ g)
\end{array}
$$

Barème: Je n'ai pas accepté les réponses qui font les deux réductions en une seule étape, surtout quand elles sont marquées par $\rightarrow$.

Best-of:

- La bêta-réduction $\Theta g \underset{\beta}{=} g(\Theta g)$ est vrai car le combinateur de Turing se décompose en 2 expressions tout à fait similaires. Il s'agit donc, par conséquent, d'un opérateur point-fixe.
- J'ai souvent vu des pseudo-réductions dans le style des suivantes. Je les consigne uniquement dans l'espoir que les générations futures ne feront plus de pareilles horreurs.

$$\begin{aligned}\Theta\, g &= ((\lambda xy \cdot y(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy)))g \\ &\rightarrow (\lambda xg \cdot g(xxg))(\lambda xg \cdot g(xxg)) \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta\, g &= ((\lambda xy \cdot y(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy)))g \\ &\rightarrow (g(xxg))(g(xxg)) \\ &\dots\end{aligned}$$

- $\Theta g = (\lambda xy \cdot y\,(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy))g$
  $\xrightarrow{\beta}$
  $\xleftarrow{\beta}$

4. Que permettent les combinateurs de point fixe ?

Correction: À simuler la récursion : ils prennent une fonction f, et en répètent l'application jusqu'à l'obtention d'un point fixe, i.e., un x tel que $x = f(x)$.

Best-of:

- À combiner des points fixes.
- Avoir un opérateur/élément neutre pour le lambda calcul.
- Ces oppérateurs (sic) permettent de simplifier les expression (re-sic).
- Ils permettent de dupliquer des variables à gauche.
- Les combinateurs de point fixe permettent de dupliquer les fonctions.
- Ils permettent de faire des applications infinies.
- Ils permettent de montrer qu'une variable n'a pas été modifiée par la fonction. Pour $f(x) = x^2$, on a 0 et 1 par exemple.
- Les combinateurs de point fixe permettent de réaliser des bêta-réduction qu'il n'aurait pas été possible de faire autrement.
- Les opérateurs de point fixes permettent de générer des entiers.
- Ils permettent
- Les combinateurs de point-fixe permettent de dédoubler un terme.
- Ils permettent de combiner les points-fixes, évidemment.
- Les combinateurs de point fixe permettent de se passer de λ.

2 λ-Calcul Simplement Typé

Q.4 Tout λ-terme est typable...

✗ vrai ✓ faux

Q.5 Tout λ-terme qui admet un type simple est...

✗ non nécessairement normalisable ✓ fortement normalisable
✗ faiblement normalisable ✗ normalisé

Q.6 Quel type admet $\lambda xy \cdot xy$.

✗ $\rho \to \sigma \to \tau$ ✗ $(\tau \to \sigma) \to \sigma \to \tau$
✓ $(\sigma \to \tau) \to \sigma \to \tau$ ✗ $(\tau \to (\rho \to \rho)) \to \tau \to (\rho \to \rho)$

Correction: La réponse (d) n'est pas fausse, mais (b) est plus générale.

1. Le prouver.

Barème:

2 Si la preuve est correcte, mais les hypothèses ne sont pas déchargées.

Best-of:

1) Il s'agit là simplement d'une fonction qui prend 2 arguments et qui renvoit l'application du deuxième sur le premier.

Si nous nommons | α le type de x

| β le type de y

| γ le type de l'application de y sur x

3 Calcul des Séquents Classique

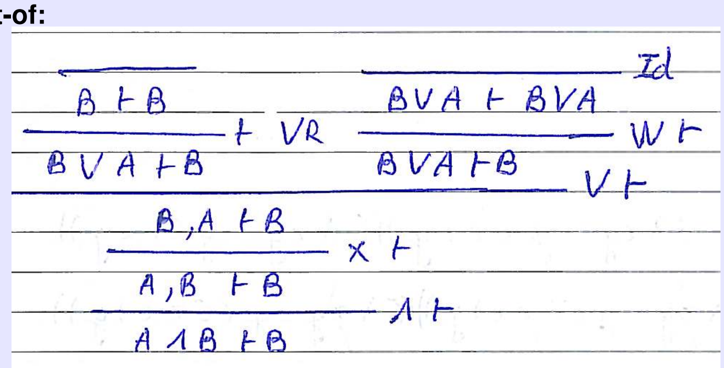
1. Éliminer la coupure dans la preuve suivante.

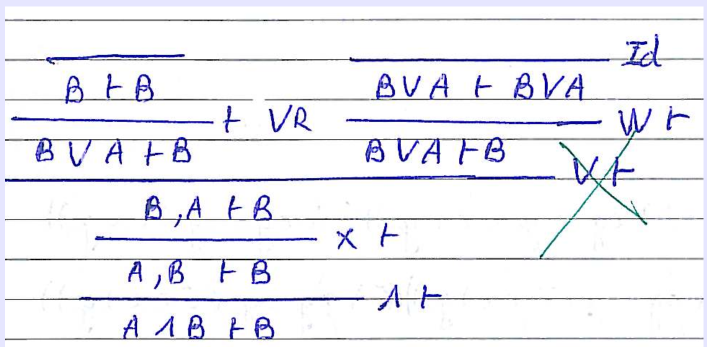
$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee B}\;\vdash \vee l
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{B, A \vee B \vdash B}\;W \vdash
    }{B, A \vdash B}\;Cut
  }{A, B \vdash B}\;X \vdash
}{A \wedge B \vdash B}\;\wedge \vdash
$$

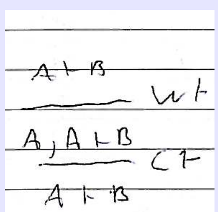
Correction:

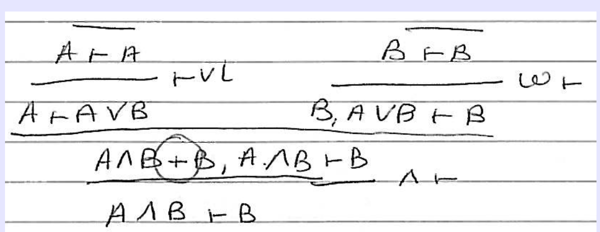
$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{B, A \vdash B}\;W \vdash
  }{A, B \vdash B}\;X \vdash
}{A \wedge B \vdash B}\;\wedge \vdash
$$

Best-of:

- 

- 

- 

- 

Q.7 Pour toute preuve avec coupures. . .

✓ elle peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux
✗ elle peut être normalisée en une preuve sans coupure
✗ il existe une preuve sans coupure
✗ il n'existe pas nécessaire de preuve équivalente sans coupure

Q.8 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce) ?

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \quad \dfrac{}{B \vdash B}}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\Rightarrow\vdash}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✓ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash A, B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A}\Rightarrow\vdash}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

Q.9 Quelle déduction prouve $(A \Rightarrow B) \vee A$?

✓ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B, A}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A}\vdash l\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A \Rightarrow B \vee A}\vdash r\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A}\vdash C$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{B \vdash A, B}\vdash W}{A \Rightarrow B \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash A \Rightarrow B \vee A}\vdash r\vee$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A}C\vdash}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A}\vdash r\vee$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash}{A \vdash B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B}}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A}\vdash \vee r$$

Q.10 Cette preuve est-elle intuitionniste ?

✗ Non, elle part du tiers exclus.
✓ Non, certains des séquents ont deux formules à droite.
✗ Oui, $A \Rightarrow B$ est faux ssi A est vrai (et B est faux) donc on a bien intuitivement $(A \Rightarrow B) \vee A$.
✗ Oui, car aucun mot du langage n'apparaît dans les hypothèses.

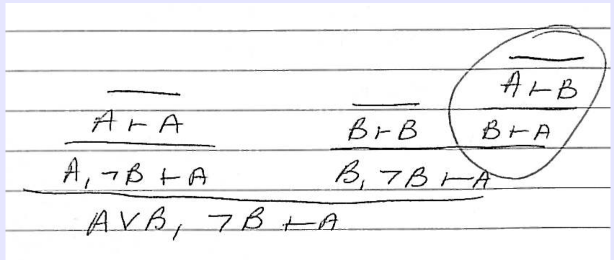
Correction: Non, certains des séquents ont deux formules à droite (e.g., $A \vdash A, B$). Et effectivement, il suffit de prendre $B = \bot$ pour voir pourquoi ce résultat n'est pas (prouvable en logique) intuitionniste.
Ça vous amusera peut-être d'apprendre que les propositions incorrectes sont tirées des best-ofs des années précédentes.

2. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A, B \Rightarrow \bot \vdash A}W\vdash \quad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B} \quad \dfrac{}{\bot \vdash A}}{B, B \Rightarrow \bot \vdash A}\Rightarrow\vdash}{A \vee B, B \Rightarrow \bot \vdash A}\vee\vdash$$

Best-of:



3. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation classique.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash A}}{A, \neg B \vdash A}\,W\vdash \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{B \vdash B}}{B \vdash B, A}\,\vdash W}{B, \neg B \vdash A}\,\vdash\neg}{A \vee B, \neg B \vdash A}\,\vee\vdash$$

4 Déduction Naturelle Intuitionniste

Q.11 Quelle preuve de $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ est valide ?

✓
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\,\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\,\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\,\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\,\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_{1,2}$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A \quad B}\,\wedge r\mathcal{E}}{B \quad A}\,X}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\,\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\,\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\,\wedge\mathcal{I}}{B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_2}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

1. Prouver $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A} \quad \dfrac{[A \wedge C]^1}{A}}{A}\,1 \qquad \dfrac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{B}}{B \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge C]^2}{C}}{B \vee C}}{B \vee C}\,2}{A \wedge (B \vee C)}$$

2. Prouver $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \qquad [B]^1}{A \wedge B}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \qquad [C]^1}{A \wedge C}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\, 1$$

Best-of:

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad \dfrac{\overline{B} \quad \overline{C}}{B \vee C}\vdash\vee}{A \wedge (B \vee C)}\vdash\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{A} \quad \overline{B}}{A \wedge B}\vdash\wedge \qquad \dfrac{\overline{A} \quad \overline{C}}{A \wedge C}\vdash\wedge}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\vdash\vee}{A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\vdash$$

3. Prouver $B \vee \neg B$.

Correction: Il est bien entendu impossible de démontrer le tiers exclus en logique intuitionniste.

Best-of:

- Si B est vrai : Si B est faux :

  $\dfrac{[B]}{B \vee \neg B}\vee_l I$ $\dfrac{[\neg B]}{B \vee \neg B}\vee_r I$

  → Dans tous les cas c'est vrai.

- Prouver B ∨ ¬B est impossible en logique intuitionnelle, à cause du tiers exclu.

- 3. B ∨ ¬B ⟹ Ici, pas besoin d'utiliser vos symboles bizarres puisqu'il s'agit ni plus ni moins d'un X OU (NON X). Or, on sait que le "ou" logique est vrai si l'une des 2 expressions en entrée est vrai. Or si B est vrai, ¬B est faux par définition de l'opérateur "¬", est inversement. Donc B ∨ ¬B est forcement vrai.

B	¬B	B ∨ ¬B
T	F	T
F	T	T

  T = vrai.
  F = faux.

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.12 Assiduité

- ✗ Jamais venu
- ✗ Presque jamais venu
- ✗ Souvent venu
- ✗ Toujours présent

Q.13 Prises de notes

- ✗ Aucune
- ✗ Sur papier
- ✗ Sur ordinateur à clavier
- ✗ Sur ardoise
- ✗ Sur le journal du jour

Q.14 Travail personnel

- ✗ Rien
- ✗ Bachotage récent
- ✗ Relu les notes entre chaque cours
- ✗ Fait les anales
- ✗ Lu d'autres sources

Q.15 Ce cours

- ✗ Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
- ✗ Est difficile à suivre mais j'essaie
- ✗ Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
- ✗ Est trop élémentaire

Q.16 Ce cours

- ✗ Ne m'a donné aucune satisfaction
- ✗ N'a aucun intérêt dans ma formation
- ✗ Est une agréable curiosité
- ✗ Est nécessaire mais pas intéressant
- ✗ Je le recommande

Q.17 L'enseignant

- ✗ N'est pas pédagogue
- ✗ Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- ✗ Me parle
- ✗ Se répète vraiment trop
- ✗ Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut