

# LOFO — Logique Formelle

EPITA – Documents, ordinateurs et calculatrices sont interdits

Juin 2012 (1h30)

Bien lire les questions, chaque mot est important. Écrire court, juste, et bien. Une argumentation informelle mais convaincante est souvent suffisante.

Pour les questions à choix multiples (numérotées Q.1, Q.2 etc.) aucune réponse manuscrite ne sera corrigée : répondre sur les formulaires. Renseigner les champs d'identité. Il y a exactement une et une seule réponse juste pour ces questions. Si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive. Par exemple s'il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négatif*, cocher *nul* qui est plus restrictif que *positif* et *négatif*, tous deux vrais. Répondre incorrectement est plus pénalisé que de ne pas répondre.

## 1 λ-Calcul

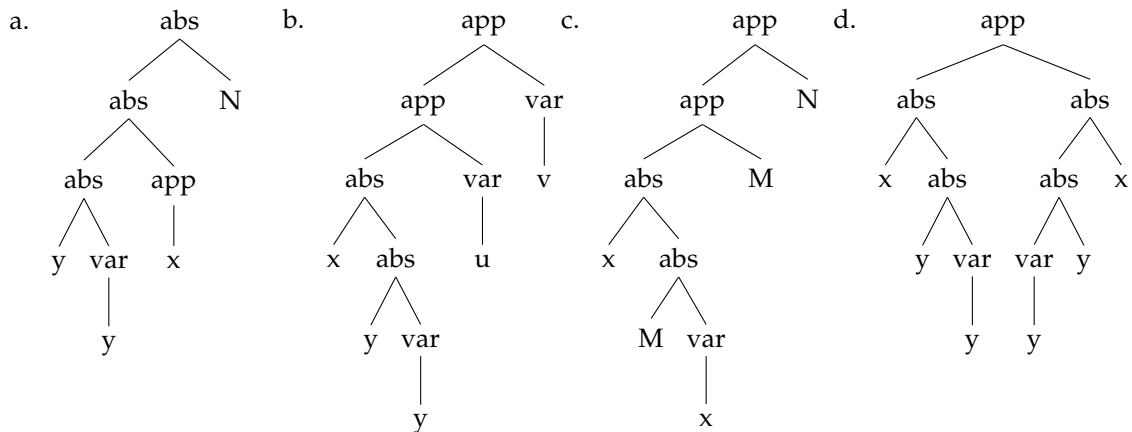
Q.1 Quelle équivalence est *fausse* ?

- a.  $x\lambda x \cdot xxx \equiv x\lambda y \cdot (yy)y$
- b.  $x\lambda x \cdot xxx \equiv x\lambda y \cdot y(yy)$
- c.  $x\lambda x \cdot xx \equiv x(\lambda y \cdot yy)$
- d.  $\lambda xy \cdot xy \equiv \lambda ab \cdot ab$

Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de  $\lambda nfx \cdot f(nfx)$ .

- a.  $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot (f((nf)x))))))$
- b.  $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot (f((nf)x))))))$
- c.  $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot f)))(nf)x$
- d.  $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot \lambda x \cdot (f((nf)x))))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?



Soit le combinateur suivant :

$$\Theta = (\lambda xy \cdot y(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy)) \quad (\text{Combinateur de Turing})$$

1. Écrire  $\Theta$  en le parenthésant complètement.
2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de  $\Theta$  en utilisant les constructeurs `var`, `abs` et `app`, et les noms des variables pour feuilles.

3. Prouver que  $\Theta$  est un opérateur de point fixe en démontrant que pour toute  $\lambda$ -fonction  $g$  on a  $\Theta g = g(\Theta g)$ .
4. Que permettent les combinateurs de point fixe ?

## 2 $\lambda$ -Calcul Simplement Typé

Q.4 Tout  $\lambda$ -terme est typable. . .

- a. vrai
- b. faux

Q.5 Tout  $\lambda$ -terme qui admet un type simple est. . .

- a. non nécessairement normalisable
- b. faiblement normalisable
- c. fortement normalisable
- d. normalisé

Q.6 Quel type admet  $\lambda xy \cdot xy$ .

- a.  $\rho \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$
- b.  $(\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$
- c.  $(\tau \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$
- d.  $(\tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)) \rightarrow \tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)$

1. Le prouver.

## 3 Calcul des Séquents Classique

1. Éliminer la coupure dans la preuve suivante.

$$\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash A \vee B} \vee I \quad \frac{\overline{B \vdash B}}{B, A \vee B \vdash B} W \vdash}{\frac{B, A \vdash B}{A, B \vdash B} X \vdash} \text{Cut} \quad \frac{A \wedge B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \wedge \vdash$$

Q.7 Pour toute preuve avec coupures. . .

- a. elle peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux
- b. elle peut être normalisée en une preuve sans coupure
- c. il existe une preuve sans coupure
- d. il n'existe pas nécessaire de preuve équivalente sans coupure

Q.8 Quelle déduction est une preuve de  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$  (Loi de Peirce) ?

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \quad \frac{}{B \vdash B} \\
 \frac{}{A, A \Rightarrow B \vdash B} \Rightarrow \vdash \\
 \frac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B} \vdash \Rightarrow \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B} \vdash X \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash C \quad \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow \\
 \frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{A \vdash A, B} \vdash W \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A} \Rightarrow \vdash \\
 \frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \vdash C \\
 \frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \Rightarrow \vdash \\
 \frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B} \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B} \vdash X \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash C \quad \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \Rightarrow \vdash \\
 \frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
 \end{array}$$

Q.9 Quelle déduction prouve  $(A \Rightarrow B) \vee A$  ?

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{A \vdash B, A} \vdash W \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A} \vdash \vee \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A \Rightarrow B \vee A} \vdash \vee \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A} \vdash C
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{B \vdash B} \\
 \frac{}{B \vdash A, B} \vdash W \\
 \frac{}{A \Rightarrow B \vdash A} \Rightarrow \vdash \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A} \vdash \vee
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{A \vdash B} \\
 \frac{}{\vdash A \Rightarrow B} \\
 \frac{}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A} \vdash \vee
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \\
 \frac{}{\vdash A} \\
 \frac{}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A} \vdash \vee
 \end{array}$$

Q.10 Cette preuve est-elle intuitionniste ?

- a. Non, elle part du tiers exclus.
- b. Non, certains des séquents ont deux formules à droite.
- c. Oui,  $A \Rightarrow B$  est faux ssi  $A$  est vrai (et  $B$  est faux) donc on a bien intuitivement  $(A \Rightarrow B) \vee A$ .
- d. Oui, car aucun mot du langage n'apparaît dans les hypothèses.

2. Prouver  $A \vee B, \neg B \vdash A$ , en utilisant la négation intuitionniste.

3. Prouver  $A \vee B, \neg B \vdash A$ , en utilisant la négation classique.

## 4 Déduction Naturelle Intuitionniste

Q.11 Quelle preuve de  $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$  est valide ?

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge l\mathcal{E} \\
 \frac{B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \wedge I \\
 \Rightarrow I_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge l\mathcal{E} \\
 \frac{B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \wedge I \\
 \Rightarrow I_{1,2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge r\mathcal{E} \\
 \frac{A \quad B}{B \quad A} X \\
 \frac{B \quad A}{B \wedge A} \wedge I \\
 \frac{B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge l\mathcal{E} \\
 \frac{B \wedge A}{B \Rightarrow B \wedge A} \wedge I \\
 \frac{B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1
 \end{array}$$

1. Prouver  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$ .
2. Prouver  $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ .
3. Prouver  $B \vee \neg B$ .

## 5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.12 Assiduité

- |                        |                     |
|------------------------|---------------------|
| a. Jamais venu         | c. Souvent venu     |
| b. Presque jamais venu | d. Toujours présent |

Q.13 Prises de notes

- |               |                             |                           |
|---------------|-----------------------------|---------------------------|
| a. Aucune     | c. Sur ordinateur à clavier | e. Sur le journal du jour |
| b. Sur papier | d. Sur ardoise              |                           |

Q.14 Travail personnel

- |                                      |                        |
|--------------------------------------|------------------------|
| a. Rien                              | d. Fait les annales    |
| b. Bachotage récent                  | e. Lu d'autres sources |
| c. Relu les notes entre chaque cours |                        |

Q.15 Ce cours

- |  |   |
|--|---|
| a. Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné | c. Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc |
| b. Est difficile à suivre mais j'essaie              | d. Est trop élémentaire                                 |

Q.16 Ce cours

- |  |  |
|--|--|
| a. Ne m'a donné aucune satisfaction    | d. Est nécessaire mais pas intéressant |
| b. N'a aucun intérêt dans ma formation | e. Je le recommande                    |
| c. Est une agréable curiosité          |  |

Q.17 L'enseignant

- a. N'est pas pédagogue
- b. Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- c. Me parle
- d. Se répète vraiment trop
- e. Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut