LOFO — Logique Formelle (Correction)

EPITA – **Sans machine ni document**

Juin 2013 (1h30)

Bien lire les questions, chaque mot est important. Écrire court, juste, et bien. Une argumentation informelle mais convaincante est souvent suffisante.

Pour les questions à choix multiples (numérotées Q.1, Q.2 etc.) aucune réponse manuscrite ne sera corrigée : répondre sur les formulaires. Renseigner les champs d'identité. Il y a exactement une et une seule réponse juste pour ces questions. Si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive. Par exemple s'il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négatif*, cocher *nul* qui est plus restrictif que *positif* et *négatif*, tous deux vrais. Répondre incorrectement est plus pénalisé que de ne pas répondre.

1 λ-Calcul

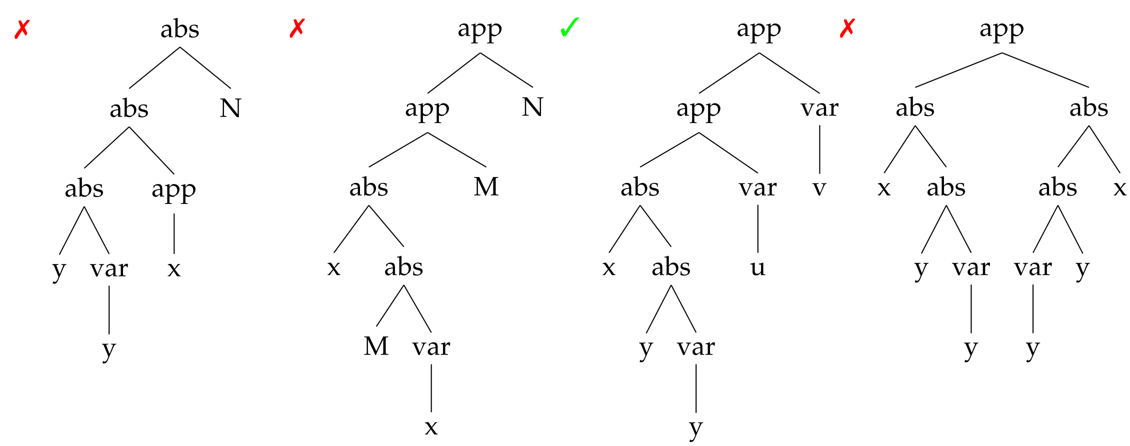
Q.1 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda xyz \cdot xz(yz)$.

- ✓ $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot ((xz)(yz)))))$.
- ✗ $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (x(z(yz))))))$.
- ✗ $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz))(yz)))$.
- ✗ $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz)))(yz))$.
- ✗ $((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz))))(yz))$.

Q.2 À quoi $\lambda nfx \cdot f(f(x))$ n'est *pas* équivalent ?

- ✗ $\lambda ffx \cdot f(f(x))$
- ✗ $\lambda xfx \cdot f(f(x))$
- ✗ $\lambda xxf \cdot x(x(f))$
- ✓ $\lambda xfx \cdot x(x(f))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?



Soit les combinateurs suivants :

$$
\begin{aligned}
\textsf{True} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot x \\
\textsf{False} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot y \\
\textsf{Pair} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda f \cdot fxy \\
\textsf{First} &= \lambda p \cdot p\ \textsf{True} \\
\textsf{Second} &= \lambda p \cdot p\ \textsf{False}
\end{aligned}
$$

1. Prouver que First (Pair M N) $\xrightarrow{*} M$.

2. Les entiers de Church, $\underline{n}$ sont des fonctions de répétition. Le nombre de Church $\underline{0}$ applique 0 fois son argument fonction à un argument valeur, $\underline{42}$ le fait 42 fois. On pose :

$$\underline{n} = \lambda f \cdot \lambda x \cdot \underbrace{(f \cdots (f}_{n \text{ fois}}\, x \underbrace{) \cdots)}_{n \text{ fois}}$$

Que calcule le combinateur S ?

$$\mathsf{S} \quad = \quad \lambda n \cdot \lambda f \cdot \lambda x \cdot f\ (n\ f\ x)$$

Correction: On reconnaît le combinateur qui calcule le successeur d'un entier de Church : il applique la fonction une fois de plus.

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{S}\ \underline{n} & = & \lambda n \cdot \lambda f \cdot \lambda x \cdot f\ (n\ f\ x)\ \underline{n} \\
& \to_\beta & \lambda f \cdot \lambda x \cdot f\ (\underline{n}\ f\ x) \\
& = & \lambda f \cdot \lambda x \cdot f\ (\lambda x \cdot \underbrace{(f \cdots (f}_{n \text{ fois}}\, x \underbrace{) \cdots)}_{n \text{ fois}}) \\
& = & \lambda f \cdot \lambda x \cdot (\lambda x \cdot \underbrace{(f \cdots (f}_{n+1 \text{ fois}}\, x \underbrace{) \cdots)}_{n+1 \text{ fois}}) \\
& = & \underline{n+1}
\end{array}$$

Best-of:

- S calcule $\underline{1}$.
- Il calcule la valeur de n au rang supperieur.

3. En considérant que le combinateur Succ prenne un entier de Church $\underline{n}$ et retourne $\underline{n+1}$, que vaut Φ (Pair $\underline{m}$ $\underline{n}$) où :

$$\Phi \quad = \quad \lambda x \cdot \mathsf{Pair}\ (\mathsf{Second}\ x)\ (\mathsf{Succ}\ (\mathsf{Second}\ x))$$

Correction: Il est clair que Second (Pair M N) $\xrightarrow{*} N$, ce qui se montre comme en première question.

$$\begin{array}{rcl}
\Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{m}\ \underline{n}) & = & \lambda x \cdot \mathsf{Pair}\ (\mathsf{Second}\ x)\ (\mathsf{Succ}\ (\mathsf{Second}\ x))\ (\mathsf{Pair}\ \underline{m}\ \underline{n}) \\
& \to_\beta & \mathsf{Pair}\ (\mathsf{Second}\ (\mathsf{Pair}\ \underline{m}\ \underline{n}))\ (\mathsf{Succ}\ (\mathsf{Second}\ (\mathsf{Pair}\ \underline{m}\ \underline{n}))) \\
& \to_\beta & \mathsf{Pair}\ \underline{n}\ (\mathsf{Succ}\ (\mathsf{Second}\ (\mathsf{Pair}\ \underline{m}\ \underline{n}))) \\
& \to_\beta & \mathsf{Pair}\ \underline{n}\ (\mathsf{Succ}\ \underline{n}) \\
& \to_\beta & \mathsf{Pair}\ \underline{n}\ \underline{n+1}
\end{array}$$

4. Que calcule le combinateur P ? Le montrer.

$$\mathsf{P} \quad = \quad \lambda n \cdot \mathsf{First}\ (n\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{0}\ \underline{0}))$$

Correction: Appliqué à $\underline{0}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{P}\ \underline{0} & = & \lambda n \cdot \mathsf{First}\ (n\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{0}\ \underline{0}))\ \underline{0} \\ & \to & \mathsf{First}\ (\underline{0}\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{0}\ \underline{0})) \\ & \to & \mathsf{First}\ (\mathsf{Pair}\ \underline{0}\ \underline{0}) \\ & \to & \underline{0} \end{array}$$

Appliqué à $\underline{n}$, pour n non nul :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{P}\ \underline{n} & = & \lambda n \cdot \mathsf{First}\ (n\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{0}\ \underline{0}))\ \underline{n} \\ & \to & \mathsf{First}\ (\underline{n}\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{0}\ \underline{0})) \\ & \to & \mathsf{First}\ (\underline{n-1}\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{0}\ \underline{1})) \\ & \to & \mathsf{First}\ (\underline{n-2}\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{1}\ \underline{2})) \\ & \to & \ldots \\ & \to & \mathsf{First}\ (\underline{0}\ \Phi\ (\mathsf{Pair}\ \underline{n-1}\ \underline{n})) \\ & = & \mathsf{First}\ (\mathsf{Pair}\ \underline{n-1}\ \underline{n}) \\ & \to & \underline{n-1} \end{array}$$

Autrement dit, P calcule le prédécesseur d'un nombre de Church (en retournant $\underline{0}$ pour $\underline{0}$).

Best-of: Le n-ième nombre de Fibonacci.

2 λ-Calcul Simplement Typé

Q.4 Tout λ-terme est typable...

- ✗ vrai
- ✓ faux

Q.5 Tout λ-terme qui admet un type simple est...

- ✗ non nécessairement normalisable
- ✗ faiblement normalisable
- ✓ fortement normalisable
- ✗ normalisé

Q.6 Quel type admet $\lambda xy \cdot xy$.

- ✗ $\rho \to \sigma \to \tau$
- ✓ $(\sigma \to \tau) \to \sigma \to \tau$
- ✗ $(\tau \to \sigma) \to \sigma \to \tau$
- ✗ $(\tau \to (\rho \to \rho)) \to \tau \to (\rho \to \rho)$

Correction: La réponse (d) n'est pas fausse, mais (b) est plus générale.

3 Calcul des Séquents Classique

Q.7 Soit π une preuve avec coupures du séquent $\Gamma \vdash \Delta$.

- ✗ il existe une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$
- ✗ $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas nécessairement provable sans coupure
- ✗ π peut être normalisée en une preuve sans coupure
- ✓ π peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux

Q.8 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce) ?

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \quad \dfrac{}{B \vdash B}}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\Rightarrow\vdash}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✓
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash A, B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A}\Rightarrow\vdash}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}\vdash X}{\vdash A \Rightarrow B}\vdash C \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\vdash\Rightarrow$$

Q.9 Quelle déduction prouve $(A \Rightarrow B) \vee A$?

✓
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B, A}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A}\vdash\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A}\vdash l\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A \Rightarrow B \vee A}\vdash r\vee}{\vdash A \Rightarrow B \vee A}\vdash C$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{B \vdash A, B}\vdash W}{A \Rightarrow B \vdash A}\Rightarrow\vdash}{\vdash A \Rightarrow B \vee A}\vdash r\vee$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A}C\vdash}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A}\vdash r\vee$$

✗
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash}{A \vdash B}\vdash W}{\vdash A \Rightarrow B}}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A}\vdash \vee r$$

Q.10 Cette preuve est-elle intuitionniste ?

✗ Non, elle part du tiers exclus.
✓ Non, certains des séquents ont deux formules à droite.
✗ Oui, $A \Rightarrow B$ est faux ssi A est vrai (et B est faux) donc on a bien intuitivement $(A \Rightarrow B) \vee A$.
✗ Oui, car aucun mot du langage n'apparaît dans les hypothèses.

Correction: Non, certains des séquents ont deux formules à droite (e.g., $A \vdash A, B$). Et effectivement, il suffit de prendre $B = \bot$ pour voir pourquoi ce résultat n'est pas (prouvable en logique) intuitionniste.
Ça vous amusera peut-être d'apprendre que les propositions incorrectes sont tirées des best-ofs des années précédentes.

1. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A, B \Rightarrow \bot \vdash A}W\vdash \quad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B} \quad \dfrac{}{\bot \vdash A}}{B, B \Rightarrow \bot \vdash A}\Rightarrow\vdash}{A \vee B, B \Rightarrow \bot \vdash A}\vee\vdash$$

4 Déduction Naturelle Intuitionniste

Q.11 Quelle preuve de $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ est valide ?

✓ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_{1,2}$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A \quad B}\wedge r\mathcal{E}}{B \quad A}X}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

✗ $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\wedge r\mathcal{E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}}{B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_2}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}_1$$

1. Prouver $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \quad [B]^1}{A \wedge B}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{A} \quad [C]^1}{A \wedge C}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}1$$

Best-of:

2. Prouver $B \vee \neg B$.

Correction: Il est bien entendu impossible de démontrer le tiers exclus en logique intuitionniste.

Barème:

2 si on se contente de dire impossible
3 si on précise "en logique intuitionniste"
4 si on me dit « le tiers exclu est indémontrable en logique intuitionniste » (i.e., les trois choses).

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.12 Assiduité

✗ Jamais venu
✗ Presque jamais venu
✗ Souvent venu
✗ Toujours présent

Q.13 Prises de notes

- ✗ Aucune
- ✗ Sur papier
- ✗ Sur ordinateur à clavier
- ✗ Sur ardoise
- ✗ Sur le journal du jour

Q.14 Travail personnel

- ✗ Rien
- ✗ Bachotage récent
- ✗ Relu les notes entre chaque cours
- ✗ Fait les anales
- ✗ Lu d'autres sources

Q.15 Ce cours

- ✗ Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné
- ✗ Est difficile à suivre mais j'essaie
- ✗ Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc
- ✗ Est trop élémentaire

Q.16 Ce cours

- ✗ Ne m'a donné aucune satisfaction
- ✗ N'a aucun intérêt dans ma formation
- ✗ Est une agréable curiosité
- ✗ Est nécessaire mais pas intéressant
- ✗ Je le recommande

Q.17 L'enseignant

- ✗ N'est pas pédagogue
- ✗ Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau
- ✗ Me parle
- ✗ Se répète vraiment trop
- ✗ Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut