



# EPITA\_ING1\_2016\_S2 LOFO – Ni document ni machine

Nom et prénom, lisibles :

.....

.....

.....

.....

Identifiant (de haut en bas) :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Q.1** Ne rien écrire sur les bords de la feuille, ni dans les éventuels cadres grisés “☹”. Noircir les cases plutôt que cocher. Renseigner les champs d’identité. Les questions marquées par “♣” peuvent avoir plusieurs réponses justes. Toutes les autres n’en ont qu’une; si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive (par exemple s’il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négalif*, cocher *nul*). Il n’est pas possible de corriger une erreur, mais vous pouvez utiliser un crayon. Les réponses justes créditent; les incorrectes pénalisent; les blanches et réponses multiples valent 0.

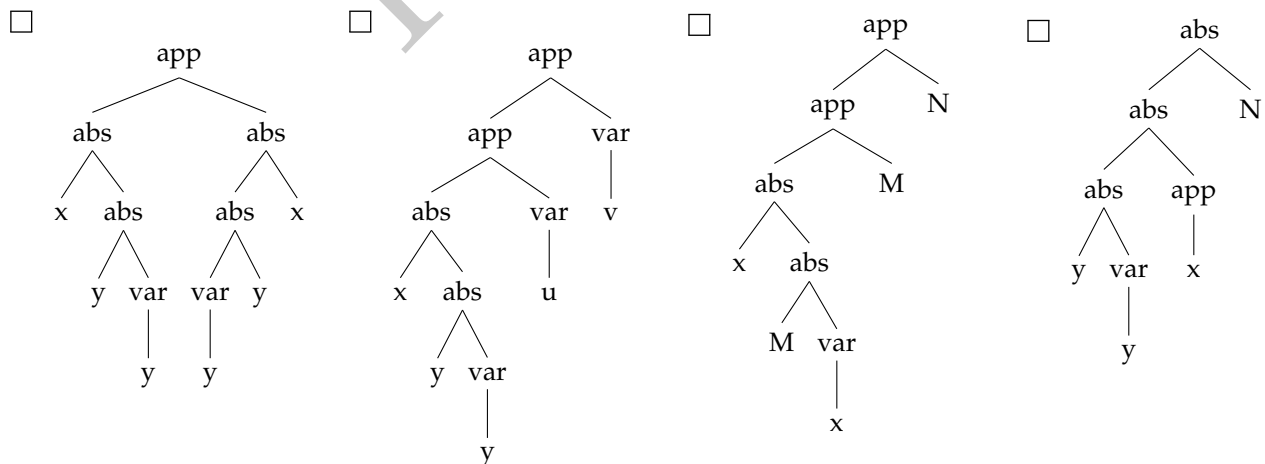
J’ai lu les instructions et mon sujet est complet: les 8 entêtes sont +1/1/xx+...+1/8/xx+.

## 1 λ-Calcul

**Q.2** Quelle est la forme complètement parenthésée de  $\lambda x y z \cdot xz(yz)$ ?

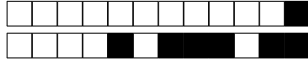
- $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (x(z(yz))))))$         $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz))(yz)))$         $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot ((xz)(yz))))$
- $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz)))(yz))$         $((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz))))(yz))$

**Q.3** Quel arbre de syntaxe abstraite est correct?



**Q.4** À quoi  $\lambda n f x \cdot f(f(x))$  n’est pas équivalent?

- $\lambda x f x \cdot f(f(x))$         $\lambda x f x \cdot x(x(f))$         $\lambda x x f \cdot x(x(f))$         $\lambda f f x \cdot f(f(x))$



Soit les combinateurs suivants:

$$\begin{aligned} \text{True} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot x \\ \text{False} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pair} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda f \cdot fxy \\ \text{First} &= \lambda p \cdot p \text{ True} \\ \text{Second} &= \lambda p \cdot p \text{ False} \end{aligned}$$

Q.5 Prouver que  $\text{First} (\text{Pair } M N) \rightarrow^* M$ .

0  1  2  3  4

Les entiers de Church,  $\underline{n}$  sont des fonctions de répétition. Le nombre de Church  $\underline{0}$  applique 0 fois son argument fonction à un argument valeur,  $\underline{42}$  le fait 42 fois. On pose:

$$\underline{n} = \lambda f \cdot \lambda x \cdot \underbrace{(f \dots (f x))}_{n \text{ fois}} \dots$$

Q.6 Que calcule le combinateur S? Le montrer.


$$S = \lambda n \cdot \lambda f \cdot \lambda x \cdot f (n f x)$$

0  1  2  3  4

Q.7 En considérant que le combinateur Succ prenne un entier de Church  $\underline{n}$  et retourne  $\underline{n + 1}$ , que vaut  $\Phi (\text{Pair } \underline{m} \ \underline{n})$  où:


$$\Phi = \lambda x \cdot \text{Pair} (\text{Second } x) (\text{Succ} (\text{Second } x))$$



0  1  2  3  4 

Q.8 Que calcule le combinateur P? Le montrer.

$$P = \lambda n \cdot \text{First } (n \Phi (\text{Pair } 0 0)).$$

0  1  2  3  4 

## 2 $\lambda$ -Calcul Simplement Typé

Q.9 Tout  $\lambda$ -terme qui admet un type simple est . . .



- faiblement normalisable
- normalisé

- non nécessairement normalisable
- fortement normalisable

Q.10 Quel type admet  $\lambda xy \cdot xy$ ?

- $\rho \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$
- $(\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$

- $(\tau \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$
- $(\tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)) \rightarrow \tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)$

Q.11 Tout  $\lambda$ -terme est typable. . .

- vrai
- faux

### 3 Calcul des Séquents Classique

Q.12 Quelle déduction est une preuve de  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$  (Loi de Peirce)?

$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash X \quad \frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A} \vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$

$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash C \quad \overline{A \vdash A}}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$

$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A}}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow \quad \overline{A \vdash A}}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$

$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A}}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow \quad \frac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash A, B} \vdash W}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$

Q.13 Prouver  $A \vee B, \neg B \vdash A$ , en utilisant la négation intuitionniste. On utilisera l'axiome de l'absurdité:  $\overline{\perp} \vdash$ .

0  1  2  3  4

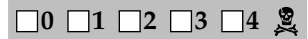
Q.14 Soit  $\pi$  une preuve avec coupures du séquent  $\Gamma \vdash \Delta$ .



- $\pi$  peut être normalisée en une preuve sans coupure
- $\Gamma \vdash \Delta$  n'est pas nécessairement prouvable sans coupure
- $\pi$  peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux
- il existe une preuve sans coupure de  $\Gamma \vdash \Delta$

### 4 Dédution Naturelle Intuitionniste

Q.15 Prouver  $B \vee \neg B$ .



Q.16 Quelle preuve de  $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$  est valide ?

- $$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} \wedge I}{B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_2}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$


$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} X}{B \wedge A} \wedge I}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} \wedge I}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} \wedge I}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_{1,2}$$



Q.17 Prouver  $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ .

0  1  2  3  4 

PRO

# LOFO Cheat Sheet

Akim Demaille

## 1 $\lambda$ -calculus

Syntactic conventions:

- Omit outer parentheses  $MN = (MN)$
- Application associates to the left  $MNL = (MN)L$
- Abstraction associates to the right  $\lambda x.MN = \lambda x.(MN)$
- Multiple arguments as syntactic sugar  $\lambda xy.M = \lambda x.\lambda y.M$  (Currification)

$M ::= x \mid (\lambda x.M) \mid (MM)$

## 2 Simply Typed $\lambda$ -calculus

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \quad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau}$$

## 3 NJ — Intuitionistic Natural Deduction

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \quad \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E \quad \frac{\perp}{A} \perp E \quad \neg A := A \Rightarrow \perp$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge rE$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I \quad \frac{B}{A \vee B} \vee rI \quad \frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{A \vee B \quad C} \vee E$$

## 4 LK — Classical Sequent Calculus

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \vdash$$

$$\frac{}{F \vdash F} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash \neg \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash \wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r \wedge \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow \vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \vdash \Rightarrow$$

## 5 LJ — Intuitionistic Sequent Calculus

$$\frac{}{A \vdash A} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \text{Cut}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\sigma(\Gamma) \vdash B} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} W \vdash \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} C \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \vdash \wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} r \wedge \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vdash \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \vee \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow \vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \vdash \Rightarrow$$



**Fin de l'épreuve.**

PROJET