



EPITA_ING1_2016_S2 LOFO – Ni document ni machine

Nom et prénom, lisibles :

.....

.....

.....

.....

Identifiant (de haut en bas) :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Q.1 Ne rien écrire sur les bords de la feuille, ni dans les éventuels cadres grisés “☹”. Noircir les cases plutôt que cocher. Renseigner les champs d’identité. Les questions marquées par “♣” peuvent avoir plusieurs réponses justes. Toutes les autres n’en ont qu’une; si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive (par exemple s’il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négatif*, cocher *nul*). Il n’est pas possible de corriger une erreur, mais vous pouvez utiliser un crayon. Les réponses justes créditent; les incorrectes pénalisent; les blanches et réponses multiples valent 0.

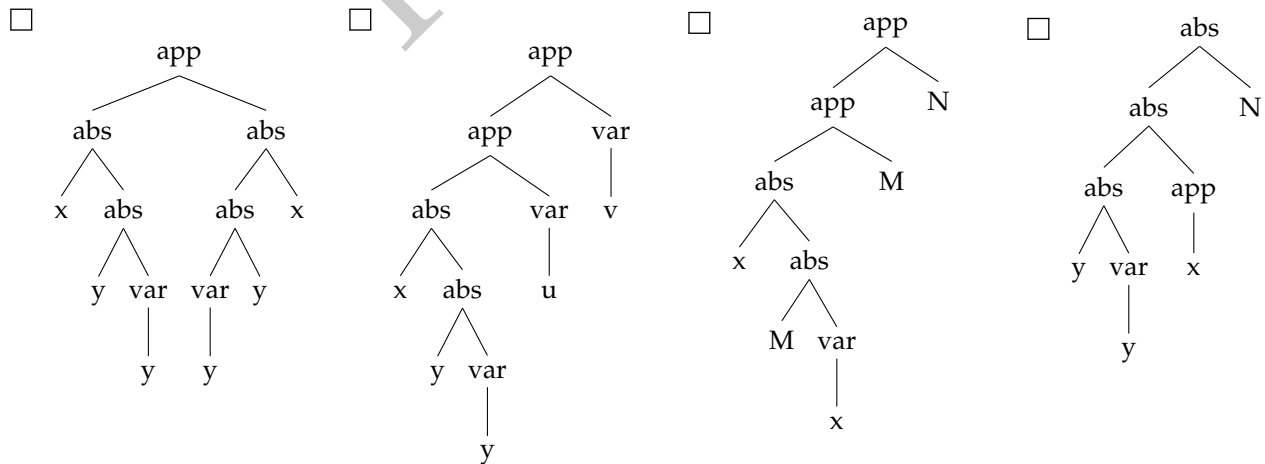
J’ai lu les instructions et mon sujet est complet: les 8 entêtes sont +1/1/xx+...+1/8/xx+.

1 λ-Calcul

Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda xyz \cdot xz(yz)$?

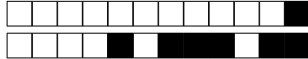
- $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (x(z(yz))))))$ $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz))(yz)))$ $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot ((xz)(yz))))$
- $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz)))(yz))$ $((\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (\lambda z \cdot (xz))))(yz))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct?



Q.4 À quoi $\lambda nfx \cdot f(f(x))$ n’est pas équivalent?

- $\lambda xfx \cdot f(f(x))$ $\lambda xfx \cdot x(x(f))$ $\lambda xxf \cdot x(x(f))$ $\lambda ffx \cdot f(f(x))$



Soit les combinateurs suivants:

$$\begin{aligned} \text{True} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot x \\ \text{False} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pair} &= \lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda f \cdot fxy \\ \text{First} &= \lambda p \cdot p \text{ True} \\ \text{Second} &= \lambda p \cdot p \text{ False} \end{aligned}$$

Q.5 Prouver que $\text{First} (\text{Pair } M N) \rightarrow^* M$.

0 1 2 3 4

Les entiers de Church, \underline{n} sont des fonctions de répétition. Le nombre de Church $\underline{0}$ applique 0 fois son argument fonction à un argument valeur, $\underline{42}$ le fait 42 fois. On pose:

$$\underline{n} = \lambda f \cdot \lambda x \cdot \underbrace{(f \dots (f x))}_{n \text{ fois}} \dots$$

Q.6 Que calcule le combinateur S? Le montrer.


$$S = \lambda n \cdot \lambda f \cdot \lambda x \cdot f (n f x)$$

0 1 2 3 4

Q.7 En considérant que le combinateur Succ prenne un entier de Church \underline{n} et retourne $\underline{n + 1}$, que vaut $\Phi (\text{Pair } \underline{m} \ \underline{n})$ où:


$$\Phi = \lambda x \cdot \text{Pair} (\text{Second } x) (\text{Succ} (\text{Second } x))$$



0 1 2 3 4 

Q.8 Que calcule le combinateur P? Le montrer.

$$P = \lambda n \cdot \text{First } (n \Phi (\text{Pair } 0 0)).$$

0 1 2 3 4 

2 λ -Calcul Simplement Typé

Q.9 Tout λ -terme qui admet un type simple est . . .



- faiblement normalisable
- normalisé

- non nécessairement normalisable
- fortement normalisable

Q.10 Quel type admet $\lambda xy \cdot xy$?

- $\rho \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$
- $(\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$

- $(\tau \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$
- $(\tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)) \rightarrow \tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)$

Q.11 Tout λ -terme est typable. . .

- vrai
- faux

3 Calcul des Séquents Classique

Q.12 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce)?

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash X \quad \frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A} \vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B}}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash X \quad \frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow A} \vdash C}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \Rightarrow \vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \frac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash A} \vdash \Rightarrow}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \Rightarrow \vdash}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash A, B} \vdash W}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \frac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash A} \vdash \Rightarrow}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A} \Rightarrow \vdash}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \vdash C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow$$

Q.13 Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste. On utilisera l'axiome de l'absurdité: $\overline{\perp} \vdash$.

0 1 2 3 4

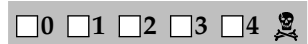
Q.14 Soit π une preuve avec coupures du séquent $\Gamma \vdash \Delta$.



- π peut être normalisée en une preuve sans coupure
- $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas nécessairement prouvable sans coupure
- π peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux
- il existe une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$

4 Dédution Naturelle Intuitionniste

Q.15 Prouver $B \vee \neg B$.



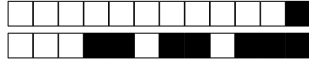
Q.16 Quelle preuve de $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ est valide ?

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} \wedge I}{B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_2}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$


$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} \wedge I}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} \wedge I}{B \wedge A} X}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge r\mathcal{E} \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge l\mathcal{E}}{B \wedge A} \wedge I}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_{1,2}$$



Q.17 Prouver $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

0 1 2 3 4 

PRO

LOFO Cheat Sheet

Akim Demaille

1 λ -calculus

Syntactic conventions:

- Omit outer parentheses $MN = (MN)$
- Application associates to the left $MNL = (MN)L$
- Abstraction associates to the right $\lambda x.MN = \lambda x.(MN)$
- Multiple arguments as syntactic sugar $\lambda xy.M = \lambda x.\lambda y.M$ (Currification)

$M ::= x \mid (\lambda x.M) \mid (MM)$

2 Simply Typed λ -calculus

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{MN : \tau} \quad \frac{\begin{array}{c} [x : \sigma] \\ \vdots \\ M : \tau \end{array}}{\lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau}$$

3 NJ — Intuitionistic Natural Deduction

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \quad \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E \quad \frac{\perp}{A} \perp E \quad \neg A := A \Rightarrow \perp$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge rE$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I \quad \frac{B}{A \vee B} \vee rI \quad \frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{A \vee B \quad C} \vee E$$

4 LK — Classical Sequent Calculus

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)} \vdash X \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash W \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \vdash C \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \vdash$$

$$\frac{}{F \vdash F} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \vdash \neg \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \vdash \wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} r \wedge \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow \vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \vdash \Rightarrow$$

5 LJ — Intuitionistic Sequent Calculus

$$\frac{}{A \vdash A} \text{Id} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \text{Cut}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\sigma(\Gamma) \vdash B} X \vdash \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} W \vdash \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} C \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \vdash \wedge \quad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge \vdash \quad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} r \wedge \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vdash \vee \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vdash r \vee \quad \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \vee \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow \vdash \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \vdash \Rightarrow$$



Fin de l'épreuve.

PROJET