TD 3
Automates finis

Version du 26 septembre 2016

Exercice 1 – Reconnaître une liste

Si U est un alphabet fini, on appelle *liste* de U une séquence débutant par le symbole '(', finissant par le symbole ')', et contenant des éléments de U séparés par des ':'. Ainsi par exemple : (1 : 2 : 3 : 2 : 1) est une liste d'éléments de $U = \{1, 2, 3\}$. Dans tout l'exercice, on considérera qu'une liste contient toujours au moins un élément : *il n'y a pas de liste vide*.

1. Est-il possible de reconnaître l'ensemble des listes d'éléments de $U = \{1, 2, 3\}$ avec un automate fini ? Si votre réponse est positive, donnez une représentation graphique d'un automate reconnaissant ce langage, en indiquant précisément l'alphabet, l'état initial et le ou les états finaux. Les automates les plus simples seront préférés.
2. Dans le cas où U est totalement ordonné, on s'intéresse aux listes croissantes : tout élément de la liste doit être supérieur ou égal à son prédécesseur. Peut-on reconnaître ces listes avec un automate fini ? Justifiez une réponse positive en représentant un tel automate dans le cas où $U = \{1, 2\}$.
3. Un informaticien pervers s'intéresse au cas où U contient les symboles spéciaux '(', ')' et ':'. Que se passe-t-il dans ce cas-là ? Faut-il modifier la forme de l'automate de la question 1 lorsqu'on ajoute à U ces trois symboles ? Si oui, comment ?
4. La notion de liste est étendue récursivement pour inclure les listes de listes, les listes de listes de listes... comme ((1 : 3) : 3 : (2 : 1) : ((1 : 2))). Est-il possible de reconnaître ces listes avec un automate fini ? Justifiez une réponse positive en représentant un tel automate dans le cas où $U = \{1, 2\}$.

Exercice 2 – Distributeur de boissons

On modélise un distributeur de boissons par un automate fini. L'alphabet d'entrée $\Sigma = \{d, v, c\}$ correspond aux pièces de 10, 20 et 50 centimes acceptées par le distributeur. Une boisson coûte 50 centimes.

1. Construisez un automate *A déterministe* reconnaissant toutes les séquences de pièces dont le total est 50 centimes. Vous pourrez éventuellement commencer par proposer un automate non-déterministe reconnaissant toutes ces séquences.
2. Ce distributeur est primitif : il ne rend pas la monnaie. Pour l'en rendre capable, nous allons compléter l'automate pour qu'il puisse non seulement « lire » (engranger) des pièces, mais également en « écrire » (en rendre). On parle alors de *transducteur fini*. Concrètement, chaque transition de votre nouvelle machine sera étiquetée par une paire entrée/sortie, notée a/b. Emprunter une transition étiquetée a/b s'interprète comme : *lire un a et écrire un b*.

   En partant de l'automate fini de la question précédente, construire un transducteur fini T simulant un distributeur qui rendrait la monnaie : pour toute séquence en entrée dont le total excède 50 centimes, votre transducteur doit produire en sortie une séquence dont la somme est la différence entre le montant entré et cinquante centimes.

   Illustrez son fonctionnement sur la séquence de pièces : *dvcv*.

Exercice 3 – Traduction d'expressions rationnelles

Dans cet exercice, on suppose que $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Pour chacune des expressions rationnelles suivantes, utiliser l'algorithme de Thompson pour construire un automate fini non-déterministe avec transitions spontanées, puis appliquer la construction vue en cours pour faire disparaître les transitions spontanées.

1. $c(ab + c)$
2. $(a + (cc)^\star)(b + c)$
3. $((ab + \varepsilon)^\star c)^\star$