Mémo sur les dérivées partielles

Olivier Ricou

Les fonctions

Une fonction f est dite **scalaire** lorsque son espace d'arrivé est $\mathbb{R}$.

Une fonction $\mathbf{f}$ est dite **vectorielle** lorsque son espace d'arrivé est $\mathbb{R}^n$ avec $n > 1$.

Les dérivées

Soit une fonction scalaire $f(x, y)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f \text{ sa dérivé partielle première en } x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_{yy} f \text{ sa dérivée partielle seconde en } y,$$
$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \text{ sa différentielle totale} \quad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x}$$

La notation f' pour la dérivée première implique que la fonction n'a qu'une variable, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$.
On évite cette notation qui induit souvent en erreur.

Nabla

L'opérateur nabla pour une fonction qui part d'un espace à deux dimensions est $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$

Pour une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{Gradient : } \text{Grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{Laplacien : } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Note : $\nabla \cdot \nabla = \Delta$

Pour une fonction vectorielle $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\text{Divergence : } \text{Div}(\mathbf{f}) = \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \quad \text{Laplacien : } \Delta \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Développement limité

Le D.L. d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ est :

$$f(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \langle \nabla f(\mathbf{u}), \delta \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2!} \langle \nabla^2 f(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \rangle + o(\|\delta \mathbf{u}\|^2)$$
$$= f(\mathbf{u}) + \partial_x f(\mathbf{u}) \delta u_x + \partial_y f(\mathbf{u}) \delta u_y + \partial_{xx} f \frac{\delta u_x^2}{2} + \partial_{xy} f \delta u_x \delta u_y + \partial_{yy} f \frac{\delta u_y^2}{2} + o(\|\delta \mathbf{u}\|^2)$$

avec $\nabla^2 f$ la matrice hessienne de f et $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ une autre notation pour le produit scalaire.

Plus <https://fr.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/>